

# Równomierne rangowanie obiektów wielowymiarowych

Małgorzata Markowska<sup>a</sup>

**Streszczenie.** Liniowe porządkowanie obiektów wielo cechowych to jedno z podstawowych zadań taksonomicznych. Wiele znaczących rozwiązań metodologicznych zostało zaproponowanych przez polskich badaczy. Niewątpliwie największą popularność zyskała metoda Hellwiga. On też zaproponował – powszechnie obecnie stosowane – określenia: stymulanta, destymulanta, wzorzec rozwoju. Podstawowa reguła, stosowana we wszystkich metodach, polega na przekształceniu zestawu zmiennych diagnostycznych w jeden wskaźnik agregatowy, według którego porządkuje się obiekty od najlepszego do najgorszego. Zmienne diagnostyczne dobiera się tak, aby reprezentowały różne aspekty rozpatrywanego zjawiska wielowymiarowego, które ze swej natury nie może być mierzone przy pomocy jednej zmiennej. Często zdarza się tak, że niewielkie różnice w wartościach wskaźnika agregatowego determinują odmienne pozycje obiektów, co stanowi pewną niedogodność interpretacyjną.

Celem pracy jest zaproponowanie metody porządkowania liniowego obiektów wielowymiarowych, która po pierwsze nie wymaga obliczania wskaźnika agregatowego, a po drugie – przyporządkowuje obiektom rangi, które są pomiarem na niezdefiniowanej skali usytuowanej pomiędzy skalą porządkową, a skalami mocnymi. W skrócie, podejście to polega na podziale odcinka pomiędzy najlepszym i najgorszym obiektem (wzorcem i antywzorcem) na równe części. Granice tych części tworzą tzw. węzły, reprezentujące kolejne rangi. Obiektowi jest przyporządkowywana ranga tego wzorca, któremu jest on najbliższy. Przykład ilustrujący zastosowanie metody dotyczy oceny stanu ochrony zdrowia w województwach Polski, w 2022 roku – opisanego sześcioma cechami statystycznymi.

Metoda ta nie wymusza przyporządkowania obiektom kolejnych liczb naturalnych jako rang co umożliwia identyfikację obiektów odstających lub wyraźnych podziałów między grupami obiektów podobnych.

**Słowa kluczowe:** metoda porządkowania, rangowanie, Polska, rozkład równomierny

**JEL:** C19, I18; P48

## Uniform ranking of multidimensional objects

**Abstract.** Linear ordering of multidimensional objects is one of the main taxonomic tasks, also known as multidimensional comparative analysis. Many important methodological proposals have been put forward by Polish scientists. The most popular method is due to Hellwig, who also introduced such notions as stimulants, destimulants and development pattern. The general approach, present is all ordering methods, transform many diagnostic variables into one composite index. The value of this index

---

<sup>a</sup> Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Ekonomii i Finansów, Polska / Wrocław University of Economics and Business, Faculty of Economics and Finance, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4879-0112>. E-mail: [malgorzata.markowska@ue.wroc.pl](mailto:malgorzata.markowska@ue.wroc.pl).

is used to rank objects from the best to the worst, according to the assumed general criterion. This general criterion cannot be expressed satisfactorily by a simple single variable, so why the composite index is needed. Sometimes, even small values of such index discriminate objects assigning them different ranks, which may create some interpretation problems.

The aim of the paper is to propose a new method for linear ordering of multidimensional objects. The method does not require calculation of composite index and assigned ranks are located on undefined scale located somewhere between order and strong scales. Generally, the idea is to divide the linear distance between the best and the worst object into equal parts. Their borders are called nodes, and they represent consecutive ranks. Each object gets the rank from the closest node. Of course it can happen that more than one object is assigned the same rank. The empirical illustrative example shows the regional difference in health care (described by six variables), in Poland, in 2022.

The method does not force the use of all consecutive natural numbers as ranks. So we can easily identify outliers or gaps between groups of similar objects.

**Keywords:** linear ordering method, rankings, Poland, uniform distribution

## 1. Wprowadzenie

Liniowe porządkowanie obiektów opisanych wieloma zmiennymi to zagadnienie bardzo popularne – zarówno w statystyce teoretycznej (w ramach wielowymiarowej analizy porównawczej), jak i w zastosowaniach. Mamy wiele popularnych rankingów jak na przykład Human Development Index, różne rankingi wyższych uczelni, szpitali, miast, krajów, itp. Te rankingi tworzone są według jakiegoś kryterium ogólnego. Często kryterium to jest dzielone na podkryteria, a te z kolei wyrażane są przy pomocy konkretnych zmiennych statystycznych. Zasadniczym etapem budowy rankingu jest wyznaczenie miary agregatowej, aby na jej podstawie uporządkować obiekty od najlepszego do najgorszego (według przyjętego kryterium ogólnego). Stosunkowo często zdarza się, że różnice w wartościach wskaźnika agregatowego sąsiadnych – a nawet kilku kolejnych – obiektów są bardzo małe. Przyporządkowanie rang obiektom oznacza przejście od opisu wielowymiarowego (zazwyczaj na skali ilorazowej) do charakterystyki wyrażonej na skali porządkowej. Teoretycznie na skali tej nie wolno wykonywać działań arytmetycznych bo ona wyraża tylko porządek, a nie odległości – problem ten jest dyskutowany między innymi przez Kendalla i Babingtona Smitha (1939). Ta reguła jest omijana poprzez odwracanie hierarchii i zmianę nazewnictwa z „rang” na „punkty”. Czyli na przykład przy 30 obiektach, najlepszy obiekt otrzymuje 30 punktów, drugi – 29, trzeci – 28, a ostatni jeden punkt.

Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie metody porządkowania liniowego obiektów wielowymiarowych, która po pierwsze nie wymaga obliczania wskaźnika agregatowego, a po

drugie – przyporządkowuje obiektom rangi, które są pomiarem na niezdefiniowanej skali usytuowanej pomiędzy skalą porządkową a skalą różnicową lub ilorazową. Dla takich rang bardziej uzasadniona jest interpretacja w konwencji punktów. Dodatkowo – dla obiektów położonych blisko siebie przyporządkowywane są takie same rangi.

## 2. Uwagi literaturowe

Najstarszą publikacją, która wykorzystywała odwrotne (od najmniejszej wartości do największej) rangowanie pojedynczych cech, a następnie traktowanie tych rang jako punktów, była praca Bennetta (1937). Autor porównywał w niej poziom życia w 14 krajach, biorąc pod uwagę 14 cech, według danych z lat 1924-1933. Prosty wskaźnik agregatowy będący średnią wartości standaryzowanych zaproponował Perkal (1953). Konstrukcję wskaźnika jakości życia wykorzystującą punkty odniesienia opisali Drewnowski (1966, 1970) oraz Drewnowski i Scott (1968).

W Polsce największą popularność zdobyła metoda Hellwiga (1968), przewidująca konstrukcję obiektu-wzorca i liczenie odległości do niego. Hellwig wprowadził określenia stymulant (większe wartości zmiennej oznaczają wyższy poziom kryterium ogólnego) oraz destymulant (im mniej tym lepiej). Zmienne natomiast, dla których istnieje najbardziej pożądaną poziom nazywane są nominantami. Na gruncie teorii wielokryterialnego podejmowania decyzji wprowadzono między innymi metodę TOPSIS (Hwang i Yoon, 1981). Podręcznikiem (przewodnikiem) budowy wskaźników agregatowych jest publikacja Organizacji Współpracy Gospodarczej i Rozwoju (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], European Union, European Commission, Joint Research Centre, 2008).

Od lat 70-tych ubiegłego wieku pojawiło się wiele nowych propozycji lub modyfikacji podejścia klasycznego. Można tu wymienić m.in.: transpozycję obiektów (Szczotka, 1972), wykorzystanie zbiorów rozmytych (Shimura, 1973), normalizację poprzez odchylenie standardowe (Cieślak, 1974), obliczanie sumy ilorazów w stosunku do wartości najmniejszej (Bartosiewicz, 1976), przyjęcie stałych wzorców (Pluta, 1976), nieliniowe funkcje agregujące (Borys, 1978), wzorzec quasi-optimalny (Strahl, 1978), wykorzystanie pierwszej głównej składowej (Grabiński, 1984), wykorzystanie entropii Kullbacka-Leilera (Kapur i Kesavan, 1992), wykorzystanie metody DEA (Despotis, 2005), uwzględnianie zmienności cech z funkcją kary (De Muro i in., 2009), minimalną utratę informacji (Zhou i in., 2010), standaryzację z

wykorzystaniem mediany Webera (Młodak, 2010), porządkowanie na okręgu (Sokołowski i Harańczyk, 2015), miarę wektorową (Nermend, 2017), iteracyjną metodę porządkowania (Sokołowski i Markowska, 2017), wykorzystanie Skalowania Wielowymiarowego (Walesiak, 2017) czy wybór najlepszego indeksu (Markowska, w druku).

### 3. Metoda

Proponowana w pracy metoda rangowania przewiduje dwuetapowe definiowanie wzorców. Czynność wstępną to standaryzacja z doprowadzeniem zmiennych do tzw. jednolitej preferencji czyli z zamianą destymulant na stymulanty (poprzez pomnożenie standaryzowanych wartości tych drugich przez -1). Następnie wyznacza się wzorzec i antywzorzec, definiowane przez największe i najmniejsze wartości cech standaryzowanych. Obiekt najbliższy wzorcowi teoretycznemu tworzy nowy wzorzec empiryczny, a obiekt najbliższy antywzorcowi teoretycznemu staje się antywzorcem empirycznym. Tym obiektom będą przyporządkowane odpowiednio rangi 1 oraz  $n$ . Z kolei tworzone są współrzędne (w liczbie  $n - 2$ ) węzłów – dla każdej cechy osobno, równomiernie rozłożone pomiędzy współrzędnymi wzorca i antywzorca empirycznego. Ostateczna ranga obiektu jest wyznaczana przez węzeł do którego dany obiekt ma najbliżej.

Algorytm proponowanej metody przedstawiono poniżej. Jej celem jest przyporządkowanie rang  $n$  obiektom opisanych  $m$  cechami. Macierz danych  $\mathbf{X}$  zawiera elementy  $x_{ij}$ , gdzie  $i$  oznacza numer obiektu, a  $j$  – numer cechy.

1. Standaryzacja według klasycznego wzoru  $x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}$ , gdzie  $\bar{x}_j$  to średnia arytmetyczna  $j$ -tej zmiennej, a  $s_j$  to jej odchylenie standardowe;
2. Identyfikacja destymulant i ich zamiana na stymulanty poprzez pomnożenie wartości  $x_{ij}^*$  przez -1;
3. Ustalenie współrzędnych wzorca teoretycznego  $P = (P_1, P_2, \dots, P_m)$ , gdzie  $P_j = \max_i \{x_{ij}^*\}$  oraz antywzorca teoretycznego  $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ , gdzie  $A_j = \min_i \{x_{ij}^*\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ;
4. Znalezienie obiektu najbliższego do  $P$  i przyporządkowanie mu rangi 1. To jest wzorzec empiryczny;
5. Znalezienie obiektu najbliższego do  $A$  i przyporządkowanie mu rangi  $n$ . To jest antywzorzec empiryczny;

6. Ustalenie współrzędnych węzłów  $W_1, W_2, \dots, W_n$  ( $W_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im})$ ) według wzoru  $w_{ij} = A_j + (i - 1) \frac{P_j - A_j}{n-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ . Węzłowi  $W_i$  odpowiada ranga  $(n - i + 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

7. Obliczenie odległości (euklidesowej)  $d$  każdego punktu empirycznego od węzłów. Obiektowi  $i$ -temu przyporządkowana jest ranga generowana przez węzeł, który jest mu najbliższy. Oznacza to, że  $i$ -ty obiekt opisany przez  $x_i^* = (x_{i1}^*, x_{i2}^*, \dots, x_{im}^*)$  otrzymuje rangę  $(n - k + 1)$  jeżeli  $d(x_i^*, W_k) = \min_l d(x_i^*, W_l)$ .

#### 4. Przykład

Oceniamy stan ochrony zdrowia w województwach Polski, w 2022 roku. Wzięto pod uwagę następujące cechy statystyczne:

- liczba praktykujących lekarzy na 10000 ludności;
- liczba łóżek w szpitalach na 10000 ludności;
- liczba przychodni na 10000 ludności;
- liczba ratowników medycznych na 10000 ludności;
- liczba dentyстів na 10000 ludności;
- liczba pielęgniarek na 10000 ludności.

Dane wyjściowe zamieszczono w tabl. 1.

**Tabl. 1.** Zmienne diagnostyczne wykorzystane w analizie

Województwo	Lekarze	Łóżka	Przychodnie	Ratownicy	Dentyści	Pielęgniarki
	na 10000 ludności					
Dolnośląskie	37,1	46,3	5,6	3,0	10,2	55,8
Kujawsko-pomorskie	30,0	41,9	4,9	2,8	6,2	54,4
Lubelskie	37,6	51,4	6,2	3,5	10,0	67,7
Lubuskie	23,8	39,4	5,9	3,1	7,4	46,6
Łódzkie	41,1	46,9	7,0	2,7	11,1	54,4
Małopolskie	35,0	39,6	6,1	2,8	9,5	56,6
Mazowieckie	43,1	43,0	6,2	2,6	10,8	61,9
Opolskie	24,8	44,8	5,8	2,8	7,0	55,3
Podkarpackie	27,5	41,9	6,0	4,0	7,9	64,5
Podlaskie	39,1	46,3	7,1	3,4	10,7	61,6
Pomorskie	34,7	33,2	5,1	2,1	9,6	45,9
Śląskie	36,6	49,8	6,2	2,9	8,8	60,4
Świętokrzyskie	30,9	44,2	5,6	3,5	8,4	69,0
Warmińsko-mazurskie	25,7	46,4	6,5	3,8	6,7	52,3
Wielkopolskie	29,2	39,0	5,7	2,4	8,3	47,8
Zachodniopomorskie	32,1	41,5	6,1	3,9	10,1	47,9

Źródło: Bank Danych Lokalnych GUS.

Wszystkie zmienne uwzględnione w analizie zostały potraktowane jako stymulanty<sup>1</sup>. Ich standaryzowane wartości podano w tabl. 2.

Najbliższe do wzorca teoretycznego okazało się województwo podlaskie i jego współrzędne standaryzowane zostały przyjęte jako współrzędne wzorca empirycznego. Do antywzorca teoretycznego najbliższe było z kolei województwo wielkopolskie i ono zostało przyjęte jako antywzorzec empiryczny. Teraz różnice między antywzorcem a wzorcem zostały podzielone na 14 równych części – dla każdej zmiennej osobno. Współrzędne węzłów (podane w tabl. 3) zostały zdefiniowane przez te właśnie części.

**Tabl. 2.** Standaryzowane wartości zmiennych diagnostycznych

Województwo	Lekarze	Łóżka	Przychodnie	Ratownicy	Dentyści	Pielęgniarki
Dolnośląskie	0,684	0,624	-0,740	-0,082	0,830	-0,076
Kujawsko-pomorskie	-0,511	-0,348	-1,880	-0,431	-1,772	-0,273
Lubelskie	0,782	1,750	0,297	0,813	0,668	1,544
Lubuskie	-1,552	-0,900	-0,125	0,070	-0,995	-1,341
Łódzkie	1,359	0,756	1,728	-0,755	1,420	-0,267
Małopolskie	0,343	-0,856	0,113	-0,585	0,375	0,030
Mazowieckie	1,699	-0,105	0,354	-0,933	1,171	0,755
Opolskie	-1,387	0,293	-0,251	-0,424	-1,228	-0,146
Podkarpackie	-0,930	-0,348	0,073	1,715	-0,640	1,112
Podlaskie (+)	1,034	0,624	1,904	0,582	1,154	0,712
Pomorskie	0,279	-2,269	-1,522	-1,768	0,427	-1,436
Śląskie	0,602	1,397	0,377	-0,392	-0,066	0,546
Świętokrzyskie	-0,364	0,160	-0,711	0,734	-0,311	1,718
Warmińsko-mazurskie	-1,239	0,646	0,816	1,269	-1,408	-0,550
<b>Wielkopolskie (-)</b>	<b>-0,640</b>	<b>-0,988</b>	<b>-0,586</b>	<b>-1,219</b>	<b>-0,372</b>	<b>-1,174</b>
Zachodniopomorskie	-0,158	-0,436	0,153	1,408	0,746	-1,156
Antywzorzec teoretyczny	-1,552	-2,269	-1,880	-1,768	-1,772	-1,436
Wzorzec teoretyczny	1,699	1,750	1,904	1,715	1,420	1,718

Źródło: obliczenia własne.

**Tabl. 3.** Współrzędne węzłów

Węzeł	Lekarze	Łóżka	Przychodnie	Ratownicy	Dentyści	Pielęgniarki
1 (wielkopolskie)	-0,640	-0,988	-0,586	-1,219	-0,372	-1,174
2	-0,529	-0,881	-0,420	-1,099	-0,270	-1,048
3	-0,417	-0,773	-0,254	-0,979	-0,168	-0,923
4	-0,305	-0,666	-0,088	-0,859	-0,067	-0,797
5	-0,194	-0,558	0,078	-0,739	0,035	-0,671
6	-0,082	-0,451	0,244	-0,619	0,137	-0,545

<sup>1</sup> Podany przykład ma charakter ilustracyjny, nie pretenduje do uznania go za ważną analizę poziomu ochrony zdrowia w województwach. Jednak należy wspomnieć, że w przypadku wskaźników "nasyceń" personelem medycznym uwarunkowanie może być odwrotne – zły stan zdrowia populacji może powodować zwiększenie liczby lekarzy, pielęgniarek. Duża liczba wypadków w danym województwie (bo przebiegają przezeń główne drogi) może powodować zwiększenie liczby ZRM (zespoły ratownictwa medycznego), więc niekoniecznie wskaźnik ratowników powinien być stymulantą. Nasyceń personelem medycznym zależy od takich czynników jak gęstość zaludnienia – dłuższy czas dojazdu w terenie górskim może wymuszać konieczność utrzymania większej liczby ZRM. Stąd ta klasyfikacja nie jest wcale taka oczywista. Spośród współczynników korelacji liniowej pomiędzy zmiennymi wykorzystanymi w analizie tylko dwa są ujemne (lecz nieistotne statystycznie): ratownicy/dentyści -0,157 oraz ratownicy/lekarze -0,302, co nie podważa uznania wszystkich zmiennych jako zmienne jednego typu.

7	0,029	-0,343	0,410	-0,499	0,239	-0,420
8	0,141	-0,236	0,576	-0,379	0,340	-0,294
9	0,253	-0,128	0,742	-0,259	0,442	-0,168
10	0,364	-0,021	0,908	-0,139	0,544	-0,042
11	0,476	0,086	1,074	-0,019	0,645	0,083
12	0,588	0,194	1,240	0,101	0,747	0,209
13	0,699	0,301	1,406	0,221	0,849	0,335
14	0,811	0,409	1,572	0,342	0,951	0,461
15	0,923	0,516	1,738	0,462	1,052	0,586
16 (podlaskie)	1,034	0,624	1,904	0,582	1,154	0,712

Źródło: obliczenia własne.

Ostatnim etapem jest policzenie odległości (euklidesowej) pomiędzy województwami a węzłami i stwierdzenie który węzeł jest najbliższy dla danego województwa. W ten sposób uzyskuje się rangi oraz ewentualne wartości punktowe (patrz tabl. 4).

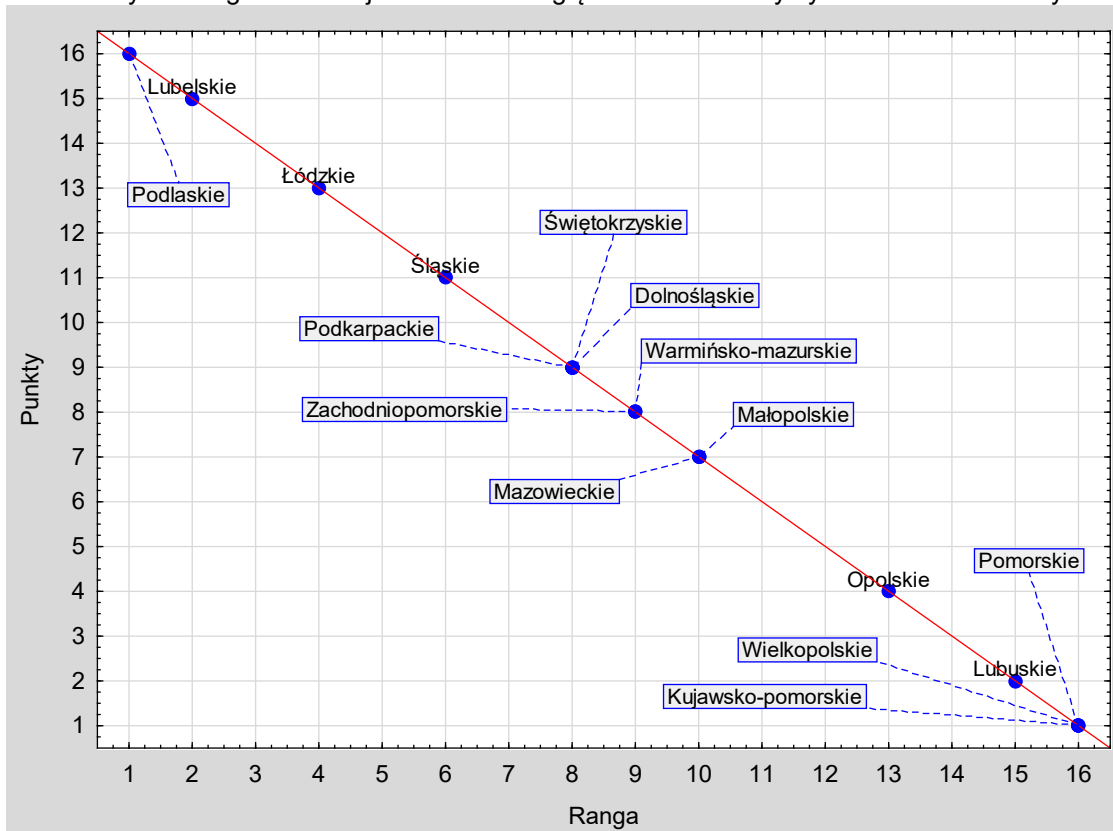
**Tabl. 4.** Ranking województw

Województwo	Numer najbliższego węzła	Ranga
Dolnośląskie	9	8
Kujawsko-pomorskie	1	16
Lubelskie	15	2
Lubuskie	2	15
Łódzkie	13	4
Małopolskie	7	10
Mazowieckie	7	10
Opolskie	4	13
Podkarpackie	9	8
Podlaskie	16	1
Pomorskie	1	16
Śląskie	11	6
Świętokrzyskie	9	8
Warmińsko-mazurskie	8	9
Wielkopolskie	1	16
Zachodniopomorskie	8	9

Źródło: obliczenia własne.

Jak wynika z przedstawionego zestawienia, niektóre województwa są zakwalifikowane tak samo – mają taką samą rangę. To jest jeden z celów proponowanej metody. Województwa podobne w zakresie przyjętych cech powinny być zaklasyfikowane podobnie. Wyniki rangowania przedstawiono na schemacie.

**Schemat.** Wyniki rangowania województw ze względu na charakterystyki z zakresu ochrony zdrowia



Źródło: opracowanie własne.

Najlepsza sytuacja w zakresie ochrony zdrowia opisanej przyjętymi sześcioma zmiennymi diagnostycznymi była obserwowana w roku 2022, w województwie podlaskim. Trzy województwa zostały razem sklasyfikowane na ostatniej pozycji – wielkopolskie, kujawsko-pomorskie i pomorskie.

## 5. Podsumowanie

Klasyczne metody rangowania obiektów wielocechowych powodują pełne przejście ze skali mocnej na porządkową. Zaproponowana metoda umożliwi omięcie zasady – obecnej w wielu metodach porządkowania liniowego – ścisłego porządkowania obiektów wielocechowych. Niekiedy bowiem, nawet bardzo niewielkie różnice w wartościach wskaźnika agregatowego, powodują przyporządkowania różnych rang, nawet gdy obiekty tak naprawdę są bardzo podobne.

Opisana metoda wydaje się być pewnym rozwiązaniem pośrednim pomiędzy skalą mocną a ścisłą skalą porządkową, ponieważ umożliwia to, by rangi przybliżyły odległości między obiektami w przestrzeni wielowymiarowej. Otrzymane rankingi pozwalają zidentyfikować obiekty odstające w wielowymiarowej przestrzeni cech, co nie ma miejsca przy typowym



rangowaniu. Nie wszystkie rangi (kolejne liczby naturalne) muszą być „obsadzone”, a różnice między kolejnymi rangami mogą być, w pewnym uproszczeniu, interpretowane jako odległości między obiektami. Ponieważ de facto jest to dalej skala porządkowa, lepiej jednak tego unikać. Zaproponowana metoda może być stosowana w porządkowaniu, na przykład, krajów (regionów) według HDI, poziomu rozwoju gospodarczego czy realizacji celów zrównoważonego rozwoju; uczelni według jakości kształcenia i aktywności naukowej; szpitali według jakości świadczonej opieki medycznej, itp.

W metodzie tej konieczne jest rozróżnienie dwóch zagadnień taksonomicznych – porządkowanie/rangowanie i grupowanie. W propozycji chodzi wyłącznie o rangowanie. Wybór innej liczby węzłów niż  $n$  oznaczałby grupowanie na  $k$  klas z nierealistycznym założeniem, że klasy są równoodległe od siebie.

Rozważając korzyści wynikające z zastosowania zaproponowanej metody można się zastanawiać czy podobnych wyników nie uzyska się wyznaczając miernik syntetyczny (dowolną metodą), a następnie dzieląc zakres wartości na  $N$  przedziałów i przypisując rangi w zależności od przedziału, w którym znalazł się dany element. Taka propozycja wydaje się prowadzić do podobnych rezultatów, lecz porządkowanie na podstawie przynależności do przedziału (a nie odległości od punktu) może dawać błędne rangowania. Obiekt leżący przy końcu przedziału otrzyma inną rangę niż obiekt leżący blisko początku kolejnego przedziału, a ich odległości do węzła mogą być bardzo podobne.

Czytelnikowi może nasunąć się pytanie – związane z tym, że w procedurze konstruuje się współrzędne węzłów dzieląc odległość między wzorcem i antywzorcem na równe odcinki – czy uzasadnionym byłby podział na nierówne odcinki? Jeśli tak to w jakiej sytuacji? Jednak nierówne odcinki zaprzeczałyby idei metody – o rangowaniu równomiernym.

Jako kierunki dalszych badań wskazać można m.in. porównanie wyników uzyskanych za pomocą proponowanej metody z innymi popularnymi technikami porządkowania liniowego. Jednak w związku z tym, że zaproponowana metoda nie wymaga wyznaczania wskaźnika agregatowego – co można uznać zarówno za wadę, jak i za zaletę – to porównywać można by zatem tylko rangi.

## **Bibliografia**

Bartosiewicz, S. (1976). Propozycja metody tworzenia zmiennych syntetycznych. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, (84), 5–9.

- Bennett, M. K. (1937). On Measurement of Relative National Standards of Living. *The Quarterly Journal of Economics*, 51(2), 317–336. <https://doi.org/10.2307/1882091>.
- Borys, T. (1978). Propozycja agregatywnej miary rozwoju obiektów. *Przegląd Statystyczny*, 25(3), 371–381.
- Cieślak, M. (1974). Taksonomiczna procedura prognozowania rozwoju gospodarczego i określania potrzeb na kadry kwalifikowane. *Przegląd Statystyczny*, 21(1), 29–39.
- De Muro, P., Mazziotta, M., Pareto, A. (2009). Composite Indices for Multidimensional Development and Poverty: An Application to MDG Indicators. *Social Indicators Research*, 104, 1–18. <http://dx.doi.org/10.1007/s11205-010-9727-z>.
- Despotis, D. K. (2005). Measuring human development via data envelopment analysis: The case of Asia and the Pacific. *Omega*, 33(5), 385–390. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2004.07.002>.
- Drewnowski, J. (1966). *The Level of Living Index*. United Nations Research Institute for Social Development.
- Drewnowski, J. (1970). *Studies in the Measurement of Levels of Living and Welfare*. United Nations Research Institute for Social Development.
- Drewnowski, J., Scott, W. (1968). The Level of Living Index. *Ekistics*, 25(149), 266–275.
- Grabiński, T. (1984). *Wielowymiarowa analiza porównawcza w badaniach dynamiki zjawisk ekonomicznych*. Akademia Ekonomiczna w Krakowie.
- Hellwig, Z. (1968). Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr. *Przegląd Statystyczny*, 15(4), 307–327.
- Hwang, C. L., Yoon, K. (1981). *Multiple Attribute Decision Making. Methods and Applications*. Springer-Verlag.
- Kapur, J. N., Kesavan, H. K. (1992). *Entropy Optimization Principles with Applications*. Academic Press.
- Kendall, M. G., Babington Smith, B. (1939). The Problem of  $m$  Rankings. *The Annals of Mathematical Statistics*, 10(3), 275–287. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177732186>.
- Markowska, M. (w druku). *Multicriteria monitoring and evaluation of the realization of Europe 2020 strategic goals in smart development*. Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu.
- Młodak, A. (2010). Imputacja danych w spisach powszechnych. *Wiadomości Statystyczne*, 55(8), 7–23. <https://doi.org/10.59139/ws.2010.08.2>.
- Nermend, K. (2017). *Metody analizy wielokryterialnej i wielowymiarowej we wspomaganii decyzji*. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Organisation for Economic Co-operation and Development, European Union, European Commission, Joint Research Centre. (2008). *Handbook on Constructing Composite Indicators. Methodology and User Guide*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264043466-en>.
- Perkal, J. (1953). O wskaźnikach antropologicznych. *Przegląd Antropologiczny*, 19, 209–221.
- Pluta, W. (1976). Taksonomiczna procedura prowadzenia syntetycznych badań porównawczych za pomocą zmodyfikowanej miary rozwoju gospodarczego. *Przegląd Statystyczny*, 23(4), 511–517.
- Shimura, M. (1973). Fuzzy Sets Concept in Rank-Ordering Objects. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 43(3), 717–733. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(73\)90287-4](https://doi.org/10.1016/0022-247X(73)90287-4).
- Sokołowski, A., Harańczyk, G. (2015). Modyfikacja wykresu radarowego. *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu / Research Papers of Wrocław University of Economics*, (384), 280–286. <https://doi.org/10.15611/pn.2015.384.30>.

- Sokołowski, A., Markowska, M. (2017). Iteracyjna metoda liniowego porządkowania obiektów wielocechowych. *Przegląd Statystyczny. Statistical Review*, 64(2), 153–162. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0014.0788>.
- Strahl, D. (1978). Propozycja konstrukcji miary syntetycznej. *Przegląd Statystyczny*, 25(2), 205–215.
- Szczotka, F. A. (1972). On a Method of Ordering and Clustering of Objects. *Zastosowania Matematyki – Applicationes Mathematicae*, 13(1), 23–34. <https://doi.org/10.4064/am-13-1-23-34>.
- Walesiak, M. (2017). Wizualizacja wyników porządkowania liniowego dla danych porządkowych z wykorzystaniem skalowania wielowymiarowego. *Przegląd Statystyczny. Statistical Review*, 64(1), 5–19. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0014.0757>.
- Zhou, P., Fan, L.-W., Zhou, D.-Q. (2010). Data aggregation in constructing composite indicators: A perspective of information loss. *Expert Systems with Applications*, 37(1), 360–365. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.05.039>.