

Modelowanie zależności cen kontraktów terminowych z wykorzystaniem wybranych kopul statycznych

Gabriela Jadwiga Malik^a

Streszczenie. Zależności pomiędzy cenami kontraktów terminowych na produkty rolne mają istotne znaczenie zarówno z punktu widzenia uczestników rynku, jak i analizy ryzyka na rynkach finansowych. Klasyczne miary korelacji liniowej, takie jak współczynnik Pearsona, mogą jednak nie w pełni odzwierciedlać nieliniowy charakter zależności oraz współwystępowanie ekstremalnych zmian cen na rynku terminowym.

Celem artykułu jest identyfikacja oraz ocena zależności pomiędzy dziennymi stopami zwrotu kontraktów terminowych na wybrane produkty rolne (kukurydza, soja, pszenica) notowane na giełdzie Chicago Board of Trade w latach 1987–2022. W badaniu zastosowano siedem dwuwymiarowych kopul (funkcji powiązań) statycznych: Gaussa, t -Studenta, Gumbela, Clayтона, Franka, Joego oraz Placketta, przy dwóch alternatywnych specyfikacjach rozkładów brzegowych: normalnym i t -Studenta. Dodatkowym celem badania jest porównanie przydatności wybranych rodzin kopul w modelowaniu tych zależności oraz ocena ich zdolności do odzwierciedlenia empirycznej struktury współzależności.

Estymacja parametrów kopul została przeprowadzona metodą największej wiarygodności, a siłę zależności oceniono za pomocą współczynnika tau Kendalla. Wyniki wskazują, że najlepsze dopasowanie do danych empirycznych zapewnia kopula Placketta oraz kopula Franka, natomiast w przypadku estymacji parametrów najczęściej najlepsze wyniki uzyskano dla kopuli t -Studenta.

Zaobserwowana rozbieżność między precyzją estymacji parametrów a oceną jakości dopasowania modeli sugeruje, że podejście statyczne może być niewystarczające do modelowania zależności w czasie. Wskazuje to na potrzebę zastosowania kopul dynamicznych, które uwzględniają zmienność struktury zależności w kolejnych okresach czasowych.

Słowa kluczowe: cena kontraktu terminowego, funkcje powiązań (kopule), estymacja, rozkłady brzegowe, współczynnik tau Kendalla

JEL: C10, C58, Q13

Modeling Dependence of Futures Contract Prices Using Selected Static Copulas

Abstract. Dependencies between prices of agricultural futures contracts are of considerable importance both for market participants and for risk analysis in financial markets. However, classical measures of

^a Wyższa Szkoła Ekonomii i Informatyki w Krakowie, Wydział Studiów Stosowanych, Zakład Informatyki, Polska / University of Economics and Informatics in Kraków, Department of Computer Science, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7804-9037>. E-mail: gmalik@wsei.edu.pl.

linear correlation, such as Pearson's correlation coefficient, may fail to fully capture nonlinear dependence structures as well as the co-occurrence of extreme price movements in futures markets.

The aim of this article is to identify and assess the dependence between daily returns of futures contracts on selected agricultural commodities (corn, soybeans, and wheat) traded on the Chicago Board of Trade over the period 1987–2022. The study employs seven static bivariate copulas: Gaussian, t - Student, Gumbel, Clayton, Frank, Joe, and Plackett, under two alternative specifications of marginal distributions: normal and t - Student. An additional objective of the study is to compare the suitability of selected copula families for modeling these dependencies and to assess their ability to accurately capture the empirical dependence structure.

The copula parameters were estimated using the maximum likelihood method, and the strength of the dependencies was assessed using Kendall's tau coefficient. The results indicate that the Plackett and Frank copulas provide the best fit to the empirical data, while in terms of parameter estimation, the t -Student copula most frequently yields the best results.

The observed discrepancy between the precision of parameter estimation and the assessment of model goodness-of-fit suggests that the static approach may be insufficient for modeling time-varying dependence. This highlights the need for dynamic copulas, which account for the changing structure of dependence over time.

Keywords: futures contract price, copulas, estimation, marginal distributions, Kendall's tau coefficient

1. Wprowadzenie

Analiza zależności pomiędzy cenami instrumentów finansowych odgrywa kluczową rolę w badaniach nad funkcjonowaniem rynków terminowych, zarządzaniem ryzykiem oraz dywersyfikacją portfela. W praktyce empirycznej do opisu współzależności pomiędzy zmiennymi finansowymi najczęściej stosowany jest współczynnik korelacji liniowej Pearsona. Miara ta – mimo swojej popularności i prostoty interpretacyjnej – posiada istotne ograniczenia, zwłaszcza w odniesieniu do danych finansowych, które często charakteryzują się nieliniową strukturą zależności, asymetrią rozkładów oraz występowaniem obserwacji ekstremalnych. W takich warunkach klasyczne podejście korelacyjne może prowadzić do niepełnego lub zniekształconego obrazu relacji pomiędzy badanymi zmiennymi.

Alternatywę dla tradycyjnych miar zależności stanowią funkcje powiązań (kopule), które umożliwiają elastyczne modelowanie struktury zależności niezależnie od rozkładów brzegowych zmiennych. Zastosowanie kopul pozwala na identyfikację zależności nieliniowych oraz analizę współzależności w ogonach rozkładów, co ma szczególne znaczenie w badaniach rynków finansowych i towarowych. W literaturze przedmiotu kopule znalazły szerokie zastosowanie m.in. w analizie rynków akcji, walut oraz instrumentów pochodnych (zob. np.

Cherubini i in., 2004; Cherubini i Luciano, 2003; Choe i Jang, 2011; Gubbels i in., 2026; Herath i in., 2013; Li, 2000; Sun, 2025; van den Goorbergh i in., 2005; Yildirim i Cengiz, 2024), jednak wciąż relatywnie mniej uwagi poświęca się porównawczej ocenie jakości dopasowania różnych statycznych kopul w badaniach zależności pomiędzy cenami kontraktów terminowych na produkty rolne.

Rynek kontraktów terminowych na produkty rolne cechuje się znaczną zmiennością oraz podatnością na czynniki fundamentalne i losowe, takie jak warunki pogodowe, zmiany polityki handlowej czy zakłócenia podaży. Powoduje to, że struktura zależności pomiędzy cenami poszczególnych instrumentów może mieć charakter złożony i odbiegać od zależności liniowych. Zastosowanie statycznych kopul umożliwia uchwycenie tych relacji w sposób bardziej elastyczny, jednak skuteczność takiego podejścia zależy zarówno od wyboru odpowiedniej rodziny kopuli, jak i specyfikacji rozkładów brzegowych.

Celem artykułu jest identyfikacja oraz ocena zależności pomiędzy dziennymi stopami zwrotu kontraktów terminowych na wybrane produkty rolne (kukurydza, soja, pszenica) notowane na giełdzie Chicago Board of Trade w latach 1987–2022. W analizie zastosowano siedem dwuwymiarowych kopul (funkcji powiązań) statycznych: Gaussa, *t*-Studenta, Gumbela, Clayтона, Franka, Joego oraz Placketta, przy dwóch alternatywnych specyfikacjach rozkładów brzegowych: normalnym i *t*-Studenta. Dodatkowym celem badania jest porównanie przydatności wybranych rodzin kopul w modelowaniu tych zależności oraz ocena ich zdolności do odzwierciedlenia empirycznej struktury współzależności.

Istotnym uzasadnieniem podjęcia niniejszego badania jest znaczenie analizowanych produktów rolnych dla globalnego rynku towarowego. Kukurydza, soja oraz pszenica należą do kluczowych surowców rolnych, a ceny kontraktów terminowych na te produkty są wzajemnie powiązane, zarówno poprzez czynniki popytowo-podażowe, jak i mechanizmy substytucji oraz wspólne uwarunkowania makroekonomiczne. Zrozumienie struktury zależności pomiędzy ich cenami ma istotne znaczenie dla uczestników rynku, w szczególności w kontekście dywersyfikacji portfela, zarządzania ryzykiem oraz konstruowania strategii hedgingowych¹.

Dodatkowym celem badania jest porównanie przydatności wybranych rodzin kopul w modelowaniu tych zależności oraz ocena ich zdolności do odzwierciedlenia empirycznej struktury współzależności.

¹ Strategie hedgingowe (strategie zabezpieczające) polegają na podejmowaniu działań mających na celu ograniczenie ryzyka niekorzystnych zmian cen aktywów lub instrumentów finansowych, m.in. poprzez wykorzystanie odpowiednich instrumentów pochodnych (zob. Hull, 2009).

2. Podstawy teoretyczne i metodyczne zastosowania kopul statycznych

Wobec niedoskonałości najpopularniejszej miary zależności jaką jest współczynnik korelacji liniowej Pearsona, do badania zależności między zjawiskami społeczno-gospodarczymi coraz częściej wykorzystywane są funkcje powiązań. Jest to narzędzie, które doskonale nadaje się do modelowania niemal wszystkich typów zależności między szeregami czasowymi. Pojęcie funkcji powiązań, nazywanej również często funkcją kopuli, pojawiło się po raz pierwszy w literaturze przedmiotu w 1959 roku w pracy naukowej Sklara (1959). Jednak dopiero w latach dziewięćdziesiątych za sprawą monografii Joego (1997) oraz Nelsena (2006) funkcje te zyskały ogromną popularność, głównie dzięki ukazaniu ich szerokiego zastosowania praktycznego w modelowaniu zależności.

Funkcje powiązań stanowią narzędzie umożliwiające modelowanie zależności pomiędzy zmiennymi losowymi w sposób niezależny od ich rozkładów brzegowych. Zgodnie z twierdzeniem Sklara (zob. Schweizer i Sklar, 1974; Sklar, 1959) każdą wielowymiarową dystrybucję można przedstawić za pomocą funkcji kopuli oraz odpowiednich rozkładów brzegowych, co pozwala na rozdzielenie analizy zachowania marginalnego zmiennych od analizy ich współzależności.

Zastosowanie kopul umożliwia identyfikację zależności nieliniowych oraz ocenę współzależności w obszarach skrajnych rozkładów, co jest szczególnie istotne w badaniach rynków finansowych i towarowych. Dzięki tej elastyczności kopule znajdują szerokie zastosowanie w analizie ryzyka, modelowaniu portfela oraz badaniach rynków instrumentów pochodnych. W niniejszym artykule wykorzystano statyczne kopule dwuwymiarowe, które zakładają stałość struktury zależności w czasie.

W analizie empirycznej zastosowano wybrane rodziny statycznych kopul dwuwymiarowych, różniące się charakterem opisywanej zależności oraz własnościami dotyczącymi symetrii i zachowania w ogonach rozkładów. Dobór kopul podyktowany był ich popularnością w badaniach finansowych oraz zdolnością do modelowania różnych typów zależności.

Kopule rozkładów eliptycznych

Kopula Gaussa

Wielowymiarowa kopula Gaussa (ang. *Multivariate Gaussian Copula*) – lub ujmując inaczej: kopula wielowymiarowego rozkładu normalnego – zdefiniowana jest następująco:

$$C_{\mathbf{R}}^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)) \quad (1)$$

gdzie:

$\Phi_{\mathbf{R}}$ – dystrybuanta wielowymiarowego standaryzowanego rozkładu normalnego z macierzą korelacji $\mathbf{R}$,

Φ – dystrybuanta standardowego, jednowymiarowego rozkładu normalnego.

Wzór (2.1) można zapisać również w formie:

$$C_{\mathbf{R}}^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\mathbf{R}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T \mathbf{R}^{-1} x\right) dx_1 \dots dx_d, \quad (2)$$

przy czym $|\mathbf{R}|$ oznacza tutaj wyznacznik macierzy.

W przypadku dwuwymiarowym macierz korelacji $\mathbf{R}$ ma postać:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $\rho \in (-1, 1)$ jest parametrem zależności kopuli Gaussa i określa kierunek i siłę zależności pomiędzy zmiennymi.

Kopula Gaussa umożliwia opis symetrycznych zależności liniowych i charakteryzuje się brakiem zależności w ogonach rozkładu.

Gęstość kopuli Gaussa jest opisana za pomocą wzoru:

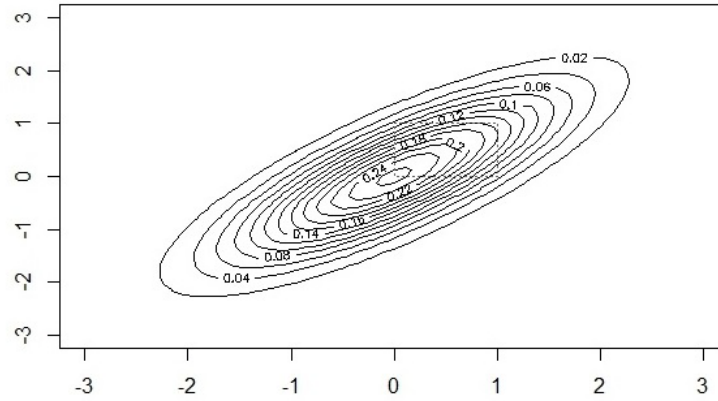
$$c_{\mathbf{R}}^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{R}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta^T (\mathbf{R}^{-1} - I) \zeta\right) \quad (1)$$

gdzie:

$$\zeta = (\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_d))^T.$$

Na wyk. 1 zaprezentowana została przykładowa ilustracja graficzna kopuli Gaussa w przypadku dwuwymiarowym dla przyjętej wartości parametru $\rho = 0,8$. Wartość ta oznacza silną dodatnią zależność pomiędzy zmiennymi w strukturze zależności opisaną przez kopulę Gaussa.

Wykr. 1. Dwuwymiarowa kopuła Gaussa dla parametru $\rho = 0,8$



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu R.

Kopuła t -Studenta

Wielowymiarowa kopuła t -Studenta (ang. *Multivariate Student's t -Copula*) zdefiniowana jest w następujący sposób:

$$C_{\mathbf{R},v}^{St}(u_1, \dots, u_d) = t_{\mathbf{R},v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)), \quad (4)$$

gdzie:

$t_{\mathbf{R},v}$ – dystrybuanta wielowymiarowego rozkładu t -Studenta o v stopniach swobody z macierzą korelacji $\mathbf{R}$,

t_v – dystrybuanta standardowego jednowymiarowego rozkładu t -Studenta o v stopniach swobody,

$v > 0$ oznacza parametr liczby stopni swobody rozkładu t -Studenta.

Parametr μ kontroluje zachowanie zależności w ogonach rozkładów. Niższe wartości parametru wskazują na większe znaczenie współwystępowania obserwacji ekstremalnych.

Wzór (4) można przedstawić również w postaci:

$$C_{\mathbf{R},v}^{St}(u_1, \dots, u_d) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma(\frac{v+d}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\sqrt{(v\pi)^d |\mathbf{R}|}} \left(1 + \frac{1}{v} x^T \mathbf{R}^{-1} x\right)^{-\frac{v+d}{2}} dx_1 \dots dx_d. \quad (5)$$

Kopuła t -Studenta, dzięki dodatkowemu parametrowi v , pozwala na modelowanie symetrycznej zależności w ogonach rozkładów, co czyni ją szczególnie użyteczną w analizie danych finansowych charakteryzujących się występowaniem obserwacji ekstremalnych.

Gęstość kopuli t -Studenta wyrażona jest wzorem:

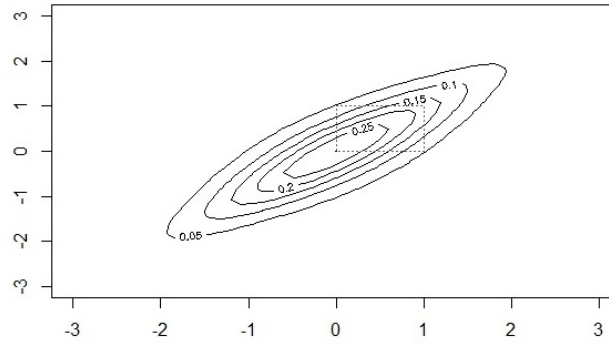
$$c_{\mathbf{R},v}^{St}(u_1, \dots, u_d) = \frac{\Gamma(\frac{v+d}{2})}{\sqrt{|\mathbf{R}|}\Gamma(\frac{v}{2})} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{v}{2})}{\Gamma(\frac{v+1}{2})} \right)^d \frac{\left(1 + \frac{1}{v} \boldsymbol{\varsigma}^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\varsigma}\right)^{-\frac{v+d}{2}}}{\prod_{j=1}^d \left(1 + \frac{\varsigma_j^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}}, \quad (6)$$

gdzie:

$$\varsigma_j = t_v^{-1}(u_j).$$

Wykr. 2 przedstawia dwuwymiarową kopulę t -Studenta wygenerowaną dla przyjętej wartości parametru $\rho = 0,8$ oraz dla 4 stopni swobody. Wartość parametru $\rho = 0,8$ oznacza silną dodatnią zależność pomiędzy zmiennymi, natomiast $v = 4$ wskazuje na relatywnie istotną rolę zależności w ogonach rozkładów, związanej z możliwością współwystępowania obserwacji ekstremalnych.

Wykr. 2. Dwuwymiarowa kopula t -Studenta dla parametrów $\rho = 0,8$ i $v = 4$



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu R.

Kopule archimedesowe

Kopule archimedesowe, w odróżnieniu od kopuł eliptycznych, definiowane są za pomocą dość prostych wzorów analitycznych. Stanowią one bardzo użyteczne narzędzie do modelowania zależności w ogonach rozkładów.

Kopula Gumbela

Kopula ta została wprowadzona do literatury w 1960 roku przez E. J. Gumbela i nazywana jest również kopulą Gumbel-Hougaard (zob. Gumbel, 1960). Jawna postać wielowymiarowej kopuli Gumbela dana jest następującym wzorem:

$$C_{\theta}^{Gu}(u_1, \dots, u_d; \theta) = \exp \left(- \left[\sum_{i=1}^d (-\ln(u_i))^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right), \quad (7)$$

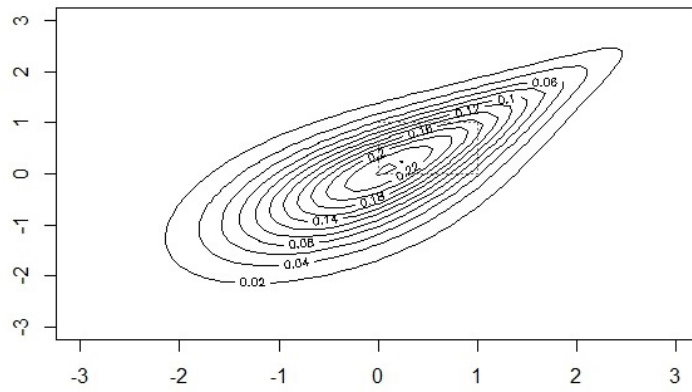
gdzie $\theta \geq 1$.

Parametr θ określa siłę zależności w górnym ogonie rozkładu. Dla $\theta = 1$ zmienne są niezależne, natomiast wraz ze wzrostem wartości parametru rośnie siła współwystępowania wysokich wartości analizowanych zmiennych.

Kopula Gumbela umożliwia modelowanie zależności przede wszystkim w górnym ogonie rozkładu.

Na wykr. 3 zaprezentowana została przykładowa dwuwymiarowa kopula Gumbela wygenerowana dla parametru $\theta = 2$.

Wykr. 3. Dwuwymiarowa kopula Gumbela dla parametru $\theta = 2$



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu R.

Kopula Claytona

Wielowymiarowa postać kopuli Claytona wyraża się wzorem:

$$C_{\theta}^{Cl}(u_1, \dots, u_d; \theta) = \max \left\{ \left[\sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - (d-1) \right]^{-\frac{1}{\theta}}, 0 \right\}, \quad (8)$$

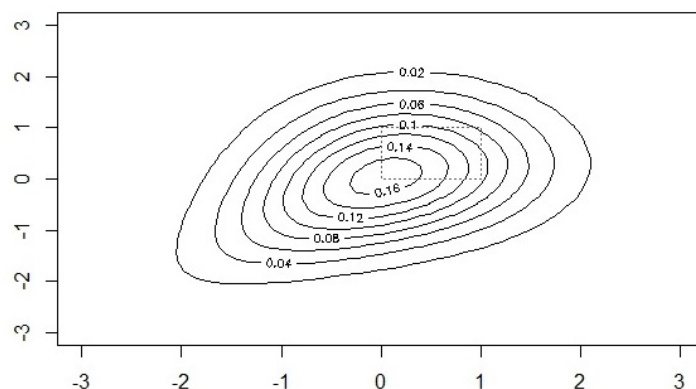
gdzie $\theta > \frac{-1}{d-1}$.

Parametr θ określa siłę zależności w dolnym ogonie rozkładu. Dla $\theta = 0$ kopula Claytona odpowiada niezależności zmiennych, natomiast w przypadku dodatnich wartości parametru wraz ze wzrostem jego wartości rośnie siła współwystępowania niskich wartości analizowanych zmiennych.

Kopula ta została po raz pierwszy zaprezentowana w artykule Claytona (1978). Charakteryzuje się ona zdolnością do opisu zależności w dolnym ogonie rozkładu.

Na wykr. 4 zaprezentowano przykładową ilustrację graficzną kopuli Claytona w przypadku dwuwymiarowym dla przyjętej wartości parametru $\theta = 0,5$.

Wykr. 4. Dwuwymiarowa kopula Claytona dla parametru $\theta = 0,5$



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu R.

Kopula Franka

Kopula Franka należy do rodziny kopuł promieniście symetrycznych. Została zaproponowana przez M. J. Franka (1979). Jej wzór jawny w przypadku wielowymiarowym można zapisać w następujący sposób:

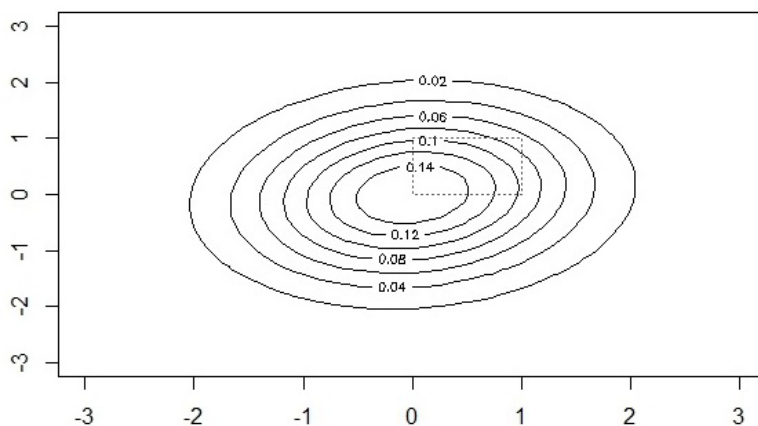
$$C_{\theta}^{Fr}(u_1, \dots, u_d; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{\prod_{i=1}^d (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{d-1}} \right], \quad (9)$$

gdzie $\theta > 0$.

Parametr θ określa siłę zależności pomiędzy zmiennymi. Wraz ze wzrostem jego wartości rośnie siła dodatniej zależności, natomiast wartości parametru zbliżające się do zera odpowiadają zależności zbliżonej do niezależności. Kopula Franka pozwala na opis symetrycznych zależności bez preferencji ogonowych.

Wykr. 5 przedstawia przykładową dwuwymiarową kopulę Franka dla przyjętej wartości parametru $\theta = 0,5$.

Wykr. 5. Dwuwymiarowa kopuła Franka dla parametru $\theta = 0,5$



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu R.

Kopuła Joego

Kopuła Joego, nazywana również kopułą B5, została wprowadzona do literatury przedmiotu w roku 1993 (zob. Joe, 1993, 1997, s. 141–142). Jej wielowymiarową postać można wyrazić za pomocą wzoru:

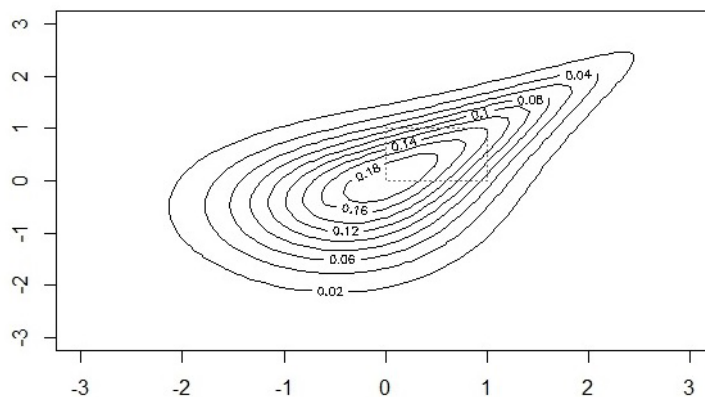
$$C_{\theta}^{Jo}(u_1, \dots, u_d; \theta) = 1 - \left[\sum_{i=1}^d (1-u_i)^{\theta} - \prod_{i=1}^d (1-u_i)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}}, \quad (10)$$

gdzie $1 \leq \theta < \infty$.

Kopuła Joe, podobnie jak kopuła Gumbela, opisuje asymetryczną zależność skoncentrowaną w górnym ogonie rozkładu. Parametr θ określa siłę tej zależności, mianowicie dla $\theta = 1$ zmienne są niezależne, natomiast wraz ze wzrostem wartości parametru rośnie siła współwystępowania wysokich wartości analizowanych zmiennych. Kopuła Joe jest zatem szczególnie użyteczna w analizie współwystępowania ekstremalnych wzrostów cen.

Wykr. 6. przedstawia przykładową kopułę Joego wygenerowaną dla przyjętej wartości parametru $\theta = 2$.

Wykr. 6. Dwuwymiarowa kopuła Joego dla parametru $\theta = 2$



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu R.

Kopula, która nie przynależy ani do rodziny kopul eliptycznych, ani do rodziny kopul archimedesowych, została wprowadzona do literatury przez Placketta (1965) i nosi nazwę swego twórcy.

Kopula Placketta

Wzór dla przypadku wielowymiarowego ma postać:

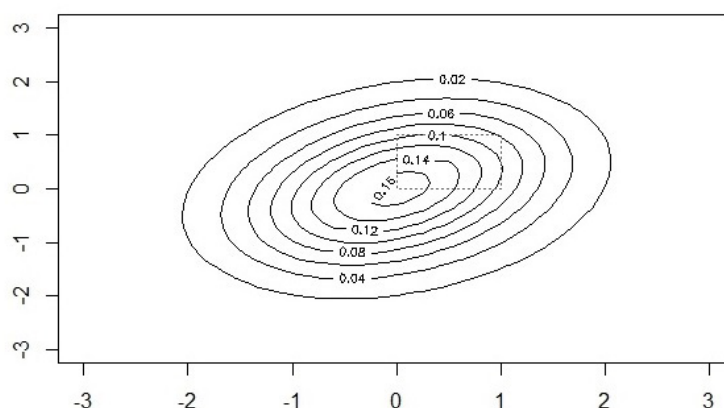
$$C_{\theta}^{Pl}(u_1, \dots, u_d; \theta) = \frac{\left[1 + (\theta - 1) \left(\sum_{i=1}^d u_i\right)\right] - \sqrt{\left[1 + (\theta - 1) \left(\sum_{i=1}^d u_i\right)\right]^2 - 4 \left(\prod_{i=1}^d u_i\right) \theta (\theta - 1)}}{2(\theta - 1)} \quad (11)$$

gdzie $\theta > 0$ i $\theta \neq 1$.

Parametr θ określa kierunek i siłę zależności pomiędzy zmiennymi. Dla $\theta = 1$ występuje niezależność zmiennych, wartości $\theta > 1$ odpowiadają zależności dodatniej, natomiast $0 < \theta < 1$ zależności ujemnej. Im bardziej wartość parametru odbiega od 1, tym silniejsza jest zależność pomiędzy zmiennymi. Kopula Placketta cechuje się dużą elastycznością w modelowaniu zarówno dodatnich, jak i ujemnych zależności o różnym natężeniu.

Na wyk. 7 zaprezentowana została dwuwymiarowa kopula Placketta wygenerowana dla przyjętej wartości parametru $\theta = 2$.

Wykr. 7. Dwuwymiarowa kopula Placketta dla parametru $\theta = 2$



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu R.

3. Metoda badania

3.1. Opis próby badawczej

Przedmiotem badania są dzienne ceny kontraktów terminowych na wybrane produkty rolne, tj. kukurydzę, soję oraz pszenicę, notowanych na giełdzie Chicago Board of Trade. Analiza obejmuje lata 1987–2022, a pojedynczy szereg czasowy liczy 9 090 obserwacji, co pozwala na uchwycenie zróżnicowanych warunków rynkowych występujących na rynku terminowym produktów rolnych.

W celu zapewnienia porównywalności analizowanych szeregów czasowych oraz eliminacji wpływu skali cen, szeregi cenowe zostały przekształcone do postaci logarytmicznych stóp zwrotu. Takie podejście jest powszechnie stosowane w badaniach empirycznych rynków finansowych i umożliwia analizę zależności pomiędzy zmiennymi o zbliżonych własnościach statystycznych.

Analiza zależności została przeprowadzona dla trzech par produktów rolnych: kukurydza–soja, kukurydza–pszenica oraz soja–pszenica, co pozwala na ocenę zróżnicowania struktury zależności pomiędzy instrumentami o odmiennych uwarunkowaniach podażyowo-popytowych.

Szczegółowe informacje dotyczące statystycznych własności rozkładu cen produktów rolnych na rynku terminowym można znaleźć w pracach Malika (2011, 2025, s. 126–132).

3.2. Specyfikacja rozkładów brzegowych

W analizie empirycznej przyjęto dwie alternatywne specyfikacje rozkładów brzegowych badanych stóp zwrotu: rozkład normalny oraz rozkład t -Studenta. Zastosowanie dwóch różnych rozkładów brzegowych pozwala na ocenę wrażliwości wyników estymacji kopuł na założenia dotyczące zachowania marginalnego zmiennych.

Rozkład normalny stanowi punkt odniesienia, często wykorzystywany w analizach empirycznych, natomiast rozkład t -Studenta umożliwia uwzględnienie leptokurtozy oraz występowania obserwacji ekstremalnych, charakterystycznych dla danych finansowych. Parametry rozkładów brzegowych zostały oszacowane metodą największej wiarygodności.

Na podstawie oszacowanych dystrybuant brzegowych dane zostały następnie przekształcone do rozkładu jednostajnego na przedziale $(0,1)$, co umożliwiło dalszą estymację parametrów funkcji powiązań.

W niniejszym badaniu zastosowano parametryczne podejście do estymacji rozkładów brzegowych. Alternatywą mogłoby być wykorzystanie metody nieparametrycznej, opartej na empirycznej dystrybucji rozkładu. Podejście takie pozwala uniknąć założeń dotyczących postaci rozkładów brzegowych, jednak w przypadku dużych prób oraz danych finansowych o wysokiej zmienności może prowadzić do niestabilności estymacji w obszarach ogonowych.

Z uwagi na porównawczy charakter badania oraz chęć zachowania spójności metodologicznej pomiędzy analizowanymi modelami, zdecydowano się na zastosowanie podejścia parametrycznego. Analiza z wykorzystaniem metod nieparametrycznych stanowi interesujący kierunek dalszych badań.

3.3. Procedura estymacji kopul statycznych

Analiza zależności pomiędzy stopami zwrotu badanych kontraktów terminowych została przeprowadzona z wykorzystaniem statycznych dwuwymiarowych funkcji powiązań. W badaniu uwzględniono siedem modeli kopul: kopule eliptyczne (Gausa oraz t -Studenta), kopule archimedesowe (Claytona, Gumbela, Franka oraz Joego) oraz kopulę Placketta, nienależącą do żadnej z wymienionych rodzin.

Procedura badawcza obejmowała kilka etapów. W pierwszym kroku oszacowano parametry rozkładów brzegowych dla poszczególnych szeregów stóp zwrotu (zob. Malik, 2024). Następnie na podstawie otrzymanych dystrybucji dane zostały przekształcone do rozkładu jednostajnego. W kolejnym etapie prac przeprowadzono estymację parametrów poszczególnych kopul metodą największej wiarygodności, oddzielnie dla każdej pary produktów rolnych oraz dla obu rozkładów brzegowych.

Warto zauważyć, że strukturę zależności między różnymi obserwacjami empirycznymi można określić za pomocą macierzy korelacji, ponieważ kopule są niezmiennicze względem ściśle monotonicznych przekształceń rozkładów brzegowych. Informacje na temat powszechnego stosowania struktury zależności między kopulami eliptycznymi można znaleźć np. w artykule Yana (2007). Dlatego też w przypadku kopul eliptycznych strukturę zależności opisano za pomocą parametru korelacji ρ , natomiast dla pozostałych kopul zastosowano parametr charakterystyczny dla danej rodziny tj. θ . Dodatkowo dla kopuli t -Studenta oszacowano parametr liczby stopni swobody, odpowiedzialny za intensywność zależności w ogonach rozkładów.

3.4. Kryteria oceny siły zależności i jakości dopasowania

Kolejnym etapem badania było sprawdzenie, czy struktura zależności opisana za pomocą wyestymowanych kopul jest dostatecznym przybliżeniem rzeczywistości i czy jest odpowiednia do modelowania danych empirycznych. W literaturze przedmiotu można znaleźć kilka propozycji dotyczących wyboru testów zgodności dla modeli kopuli. Przykładem w tym zakresie może być artykuł Hołdy i Malik (2013), w którym test dobroci dopasowania kopuli Gaussa i t -Studenta do danych empirycznych bazuje na statystyce Cramera-Misesa, zdefiniowanej w pracy Genesta i in. (2009). Wartości krytyczne dla tej statystyki zostały natomiast wyznaczone za pomocą bootstrapu parametrycznego (zob. Kojadinovic i in., 2011; Kojadinovic i Yan, 2011; Nikoloulopoulos i Karlis, 2008).

Siłę zależności pomiędzy badanymi stopami zwrotu oceniono z wykorzystaniem współczynnika tau Kendalla, który stanowi miarę opartą na rangach i jest spójny z konstrukcją funkcji kopul. Wybór tej miary wynika z jej ścisłego powiązania z funkcjami kopul. Dla wielu rodzin kopul istnieje jednoznaczna zależność pomiędzy wartością współczynnika τ a parametrami kopuli. Dzięki temu współczynnik tau Kendalla umożliwia bezpośrednią interpretację wyników estymacji w kontekście modelowanej struktury zależności.

W celu zdefiniowania współczynnika korelacji rang Kendalla należy najpierw wprowadzić mniej formalną definicję konkordancji (zob. Doman, 2011, s. 16).

Mianowicie dwie różne realizacje (x_1, y_1) , oraz (x_2, y_2) wektora losowego (X, Y) nazywamy *zgodnymi*, jeśli $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ (czyli $x_1 > x_2$ i $y_1 > y_2$ lub $x_1 < x_2$ i $y_1 < y_2$). Zwiemy je zaś *niezgodnymi*, jeśli $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$ (czyli $x_1 > x_2$ i $y_1 < y_2$ lub $x_1 < x_2$ i $y_1 > y_2$).

Definicja

Niech (X_1, Y_1) oraz (X_2, Y_2) będą niezależnymi wektorami losowymi o takim samym rozkładzie. Współczynnik korelacji τ Kendalla definiujemy następująco:

$$\tau(X_1, Y_1) = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad (12)$$

Stosując terminologię wprowadzoną powyżej, można stwierdzić, że współczynnik Kendalla dla wektora (X_1, Y_1) to prawdopodobieństwo zgodnych realizacji wektora losowego (X_1, Y_1) minus prawdopodobieństwo realizacji niezgodnych tego wektora.

Jeśli natomiast $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ jest n -elementową próbą wektora (X, Y) ciągłych zmiennych losowych, wówczas istnieje $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ różnych par (x_i, y_i) oraz (x_j, y_j) , które są zgodne lub niezgodne. Współczynnik τ Kendalla dla wersji próbkowej, który oznaczamy dla odróżnienia go od współczynnika teoretycznego przez $\hat{\tau}$, można policzyć na podstawie następującego wzoru:

$$\hat{\tau} = \frac{c-d}{c+d}, \quad (13)$$

gdzie c oznacza liczbę par zgodnych, natomiast d – liczbę par niezgodnych.

W tabl. 1 zaprezentowane zostały wzory pozwalające obliczyć współczynniki τ Kendalla wyznaczone dla kopul przedstawionych w rozdziale 2 niniejszej pracy. W przypadku kopuli Placketta nie istnieje formuła analityczna, za pomocą której można obliczyć wartość współczynnika τ Kendalla, dlatego też kopula ta nie została uwzględniona w tabeli poniżej.

Tabl. 1. Wartości współczynnika τ Kendalla dla wybranych kopul

	τ
Kopula Gaussa	$\left(\frac{2}{\pi}\right) \arcsin \rho$
Kopula t -Studenta	$\left(\frac{2}{\pi}\right) \arcsin \rho$
Kopula Gumbela	$1 - \frac{1}{\theta}$
Kopula Claytona	$\frac{\theta}{2 + \theta}$
Kopula Franka	$1 - \frac{4}{\theta} (1 - D_F(\theta))$, gdzie $D_F(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_{t=0}^{\theta} \frac{t}{e^t - 1} dt$
Kopula Joego	$1 + \frac{4}{\theta} D_J(\theta)$, gdzie $D_J(\theta) = \int_{t=0}^1 \frac{(1-t^\theta) \ln(1-t^\theta)}{t^{\theta-1}} dt$

Źródło: opracowanie własne.

Wartości współczynnika τ Kendalla zostały wyznaczone na podstawie oszacowanych parametrów kopul, a w przypadku kopuli Placketta – z wykorzystaniem metody symulacyjnej, ze względu na brak analitycznej postaci tej miary w literaturze przedmiotu.

Ze względu na dużą liczebność próby oraz porównawczy charakter analizy, ocenę jakości dopasowania kopul oparto na relacji pomiędzy empirycznymi i teoretycznymi wartościami współczynnika τ Kendalla, zgodnie z podejściem zaproponowanym przez R. Domana (por. Doman, 2011, s. 56). Procedura ta polega na porównaniu wartości τ Kendalla implikowanych przez poszczególne kopule z wartościami empirycznymi obliczonymi bezpośrednio na

podstawie danych, co umożliwia ocenę stopnia, w jakim dany model odzwierciedla rzeczywistą strukturę zależności pomiędzy analizowanymi zmiennymi.

4. Wyniki

W celu przeprowadzenia oceny zależności cen wybranych kontraktów terminowych notowanych na giełdzie towarowej w Chicago wykorzystanych zostało siedem modeli statycznych kopul dwuwymiarowych. Są to dwie kopule eliptyczne: Gaussa i *t*-Studenta, cztery kopule archimedesowe: Franka, Claytona, Gumbela i Joego oraz nieprzynależąca do żadnej z wymienionych rodzin kopula Placketta.

Estymacja parametrów kopuli została przeprowadzona dla dwóch różnych rozkładów brzegowych, mianowicie dla rozkładu normalnego i rozkładu *t*-Studenta. Wyniki dla każdej z rozważanych trzech par produktów rolnych zaprezentowano w tabl. 2 oraz 3, gdzie poza wartościami oszacowanych parametrów oraz ich średnimi błędami szacunku podanymi w nawiasach, można znaleźć również wartości funkcji wiarygodności (LLF). Ponadto kopula *t*-Studenta posiada dodatkowo parametr ν odpowiedzialny za liczbę stopni swobody, którego oszacowania zostały również zamieszczone w tabelach poniżej.

Tabl. 2. Wyniki estymacji parametrów kopul statycznych z rozkładem brzegowym normalnym

Kopula	Parametr	Kukurydza – soja	LLF	Kukurydza – pszenica	LLF	Soja – pszenica	LLF
Gaussa	ρ	0,593*** (0,005)	1963	0,472*** (0,007)	1138	0,397*** (0,008)	776,4
<i>t</i> -Studenta	ρ	0,602*** (0,011)	2092	0,478*** (0,013)	1188	0,403*** (0,015)	827,6
	ν	6,816** (2,031)		10,901** (3,231)		9,887** (3,048)	
Gumbela	θ	1,628*** (0,013)	1871	1,412*** (0,011)	1050	1,316** (0,010)	710,2
Claytona	θ	0,966*** (0,020)	1616	0,642*** (0,016)	891	0,518*** (0,015)	632,4
Franka	θ	4,432*** (0,076)	1902	3,212*** (0,071)	1113	2,583*** (0,067)	791,1
Joego	θ	1,790** (0,012)	1412	1,513** (0,011)	774,9	1,386** (0,010)	511,9
Placketta	θ	7,177*** (0,212)	1983	4,460*** (0,133)	1140	3,485*** (0,104)	775,3

Uwaga. * – istotność na poziomie 10%, ** – istotność na poziomie 5%, *** – istotność na poziomie 1%.
Źródło: opracowanie własne.

Tabl. 3. Wyniki estymacji parametrów kopul statycznych z rozkładem brzegowym *t*-Studenta

Kopula	Parametr	Kukurydza – soja	LLF	Kukurydza – pszenica	LLF	Soja – pszenica	LLF
Gausa	ρ	0,592*** (0,005)	1955	0,471*** (0,007)	1132	0,396*** (0,007)	772,4
<i>t</i> -Studenta	ρ	0,601*** (0,011)	2083	0,478*** (0,008)	1184	0,402*** (0,015)	826,3
	ν	6,820** (2,030)		10,743** (3,221)		9,691** (3,041)	
Gumbela	θ	1,626*** (0,013)	1864	1,411*** (0,011)	1047	1,315** (0,010)	708,9
Claytona	θ	0,962*** (0,020)	1607	0,639*** (0,015)	883,6	0,517*** (0,015)	629
Franka	θ	4,425*** (0,076)	1897	3,210*** (0,071)	1111	2,578*** (0,067)	746,4
Joego	θ	1,788** (0,012)	1407	1,513** (0,011)	774,3	1,385** (0,010)	511,8
Placketta	θ	7,164*** (0,211)	1978	4,459*** (0,133)	1139	3,479*** (0,104)	772,7

Uwaga. * – istotność na poziomie 10%, ** – istotność na poziomie 5%, *** – istotność na poziomie 1%.
Źródło: opracowanie własne.

Analizując wyniki zaprezentowane w tabl. 2 i 3 można zauważyć, że w przypadku obu zastosowanych rozkładów brzegowych najlepszą kopulą opisującą zależności pomiędzy parami badanych produktów rolnych jest kopula *t*-Studenta. Porównując otrzymane wartości logarytmu funkcji wiarygodności dla poszczególnych kopul, można również zaobserwować, że w przypadku rozkładu brzegowego *t*-Studenta, przydatna do opisywania zależności między parami analizowanych produktów rolnych może okazać się także kopula Placketta.

W celu oceny jakości dopasowania kopul statycznych do danych empirycznych przyjęto metodologię zaprezentowaną w podrozdziale 3.4. Wyznaczone wartości współczynnika τ Kendalla zaprezentowano w tabl. 4 oraz 5. Z kolei dla poszczególnych par produktów rolnych współczynniki próbkowe korelacji rangowej Kendalla pomiędzy dziennymi stopami zwrotu badanych produktów rolnych zostały policzone i zamieszczone w tabl. 6. Otrzymano zatem: dla pary kukurydza – soja $\hat{\tau} = 0,417$, dla pary kukurydza – pszenica $\hat{\tau} = 0,332$ oraz dla pary soja – pszenica $\hat{\tau} = 0,270$. Porównanie wartości empirycznych współczynników Kendalla z wartościami teoretycznymi wskazuje, że dla wszystkich trzech par produktów rolnych dla obu zastosowanych rozkładów brzegowych najlepiej badane zależności opisują kopula Placketta i Franka, oraz w drugiej kolejności kopula *t*-Studenta.

Tabl. 4. Wartości współczynnika tau Kendalla w przypadku rozkładu brzegowego normalnego

	Kukurydza – soja	Kukurydza – pszenica	Soja – pszenica
Kopula Gaussa	0,404	0,313	0,260
Kopula <i>t</i> -Studenta	0,411	0,317	0,264
Kopula Gumbela	0,386	0,292	0,240
Kopula Claytona	0,326	0,243	0,206
Kopula Franka	0,419	0,325	0,269
Kopula Joego	0,305	0,223	0,180
Kopula Placketta	0,415	0,323	0,272

Źródło: opracowanie własne.

Tabl. 5. Wartości współczynnika tau Kendalla w przypadku rozkładu brzegowego *t*-Studenta

	kukurydza – soja	kukurydza – pszenica	soja – pszenica
Kopula Gaussa	0,403	0,312	0,241
Kopula <i>t</i> -Studenta	0,410	0,317	0,263
Kopula Gumbela	0,385	0,291	0,239
Kopula Claytona	0,325	0,242	0,205
Kopula Franka	0,419	0,325	0,269
Kopula Joego	0,304	0,223	0,180
Kopula Placketta	0,415	0,323	0,270

Źródło: opracowanie własne.

Tabl. 6. Próbkowe współczynniki korelacji rangowej Kendalla pomiędzy dziennymi stopami zwrotu badanych produktów rolnych

	Kukurydza	Soja	Pszenica
Kukurydza	1,000	0,417	0,332
Soja	0,417	1,000	0,270
Pszenica	0,332	0,270	1,000

Źródło: opracowanie własne.

5. Wnioski i podsumowanie

Przeprowadzona analiza potwierdziła istnienie istotnych statystycznie zależności pomiędzy cenami kontraktów terminowych na badane produkty rolne. Zależności te mają charakter dodatni i umiarkowany, co wskazuje na częściową współzależność rynków, wynikającą m.in. ze wspólnych uwarunkowań podażyowo-popytowych oraz powiązań w strukturze globalnego rynku rolnego. Najsilniejsze powiązania zaobserwowano dla pary kukurydza–soja, natomiast

najsłabsze dla pary soja–pszenica. Otrzymane wartości współczynnika tau Kendalla wskazują, że zależności pomiędzy badanymi rynkami mają charakter umiarkowany, lecz nie są na tyle silne, aby traktować te instrumenty jako doskonale substytucyjne.

Analiza cen kontraktów terminowych pokazała, że modele statyczne oparte na funkcjach powiązań mogą stanowić wartościowe narzędzie w analizie zależności pomiędzy cenami produktów rolnych na rynku terminowym, jednak uzyskane wyniki wskazują, że możliwości opisowe tych metod nie zawsze są w pełni wystarczające. Estymacja modelu statycznego z wykorzystaniem siedmiu dwuwymiarowych kopul statycznych wykazała, że dla obu przyjętych rozkładów brzegowych kopulą najczęściej najlepiej opisującą zależność pomiędzy parami badanych produktów rolnych była kopula *t*-Studenta, przy czym w przypadku rozkładu brzegowego *t*-Studenta relatywnie dobre wyniki uzyskano również dla kopuli Placketta. Jednocześnie analiza jakości dopasowania kopul statycznych do danych empirycznych pozwoliła stwierdzić, że dla wszystkich trzech par produktów rolnych, niezależnie od zastosowanego rozkładu brzegowego, najlepsze dopasowanie zapewniały kopule Placketta i Franka, a w dalszej kolejności kopula *t*-Studenta. Uzyskane wyniki pozwalają na identyfikację modeli najlepiej odzwierciedlających empiryczną strukturę zależności, co stanowi wartość poznawczą wykraczającą poza aspekt metodyczny.

Zaobserwowana rozbieżność pomiędzy wnioskami wynikającymi z estymacji parametrów kopul a oceną jakości ich dopasowania wskazuje na złożoność struktury zależności stóp zwrotu produktów rolnych na rynku terminowym w Chicago oraz na ograniczenia podejścia opartego wyłącznie na statycznych kopulach dwuwymiarowych.

Uzyskane wyniki mają również istotne implikacje praktyczne. Wskazanie kopul najlepiej opisujących zależności pomiędzy cenami badanych produktów rolnych może wspierać proces zarządzania ryzykiem cenowym oraz konstrukcji portfeli inwestycyjnych opartych na instrumentach pochodnych. W szczególności zastosowanie kopul uwzględniających zależności w ogonach rozkładów pozwala na lepsze modelowanie współwystępowania ekstremalnych zmian cen, co ma kluczowe znaczenie w warunkach podwyższonej zmienności rynkowej.

W literaturze przedmiotu zależności cen kontraktów terminowych analizowane są również z wykorzystaniem bardziej klasycznych narzędzi ekonometrycznych, takich jak wielowymiarowe procesy ARMA/ARIMA (zob. np. Pinheiro i in., 2016). Przeprowadzenie formalnych analiz porównawczych w tym kierunku wykracza jednak poza zakres niniejszego artykułu. Uzyskane rezultaty wskazują natomiast na zasadność zastosowania podejścia opartego na kopulach dynamicznych, które umożliwia uwzględnienie zmienności struktury

zależności w czasie i które stanowić powinno przedmiot badań planowanych w najbliższej przyszłości.

Bibliografia

- Cherubini, U., Luciano, E. (2003). Pricing vulnerable options with copulas. *The Journal of Risk Finance*, 5(1), 27–39. <https://doi.org/10.1108/eb022977>.
- Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W. (2004). *Copula methods in finance*. John Wiley.
- Choe, G. H., Jang, H. J. (2011). Efficient algorithms for basket default swap pricing with multivariate Archimedean copulas. *Insurance: Mathematics & Economics*, 48(2), 205–213. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2010.10.006>.
- Clayton, D. G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of family tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65(1), 141–151. <https://doi.org/10.1093/biomet/65.1.141>.
- Doman, R. (2011). *Zastosowanie kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- Frank, M. J. (1979). On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. *Aequationes Mathematicae*, 19, 194–226. <https://doi.org/10.1007/BF02189866>.
- Genest, C., Okhrin, O., Bodnar, T. (2024). Copula modeling from Abe Sklar to the present day. *Journal of Multivariate Analysis*, 201, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2023.105278>.
- Genest, C., Rémillard, B., Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas: a review and a power study. *Insurance: Mathematics & Economics*, 44(2), 199–213. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.10.005>.
- Gubbels, K. B., Ypma, J. Y., Oosterlee, C. W. (2026). Principal Component Copulas for Capital Modelling and Systemic Risk. *Computational Economics*, 68, 111–141. <https://doi.org/10.1007/s10614-025-11051-7>.
- Gumbel, E. J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55(292), 698–707. <https://doi.org/10.2307/2281591>.
- Herath, H. S. B., Kumar, P., Amershi, A. H. (2013). Crack spread option pricing with copulas. *Journal of Economics and Finance*, 37(1), 100–121. <https://doi.org/10.1007/s12197-011-9171-1>.
- Hołda, A., Malik, G. (2013). Modelowanie zależności cen kontraktów terminowych na produkty rolne notowanych na giełdzie towarowej w Chicago z wykorzystaniem funkcji kopuli. *Studia Ekonomiczne*, (135), 64–78.
- Hull, J. C. (2009). *Options, Futures, and Other Derivatives* (wyd. 7). Prentice-Hall International.
- Joe, H. (1993). Parametric Families of Multivariate Distributions with Given Margins. *Journal of Multivariate Analysis*, 46(2), 262–282. <https://doi.org/10.1006/jmva.1993.1061>.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall. <https://doi.org/10.1201/9780367803896>.
- Kojadinovic, I., Yan, J. (2011). A goodness-of-fit test for multivariate multiparameter copulas based on multiplier central limit theorems. *Statistics and Computing*, 21, 17–30. <https://doi.org/10.1007/s11222-009-9142-y>.
- Kojadinovic, I., Yan, J., Holmes, M. (2011). Fast large-sample goodness-of-fit tests for copulas. *Statistica Sinica*, 21(2), 841–871. <https://doi.org/10.5705/ss.2011.037a>.

- Li, D. (2000). On default correlation: a copula function approach. *The Journal of Fixed Income*, 9(4), 43–54. <https://doi.org/10.3905/jfi.2000.319253>.
- Malik, G. (2011). Statystyczne własności rozkładu cen produktów rolnych na rynku terminowym na przykładzie giełdy towarowej w Chicago. W: J. Teczke, J. Czekaj, B. Miśka i R. Oczkowska (red.), *Nauka i gospodarka w dobie destabilizacji* (s. 81–92). Biuro Projektu Nauka i Gospodarka, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie.
- Malik, G. (2024). Estimation of Parameters of Marginal Distributions of Return Rates of Selected Agricultural Products Listed on the Chicago Commodity Exchange. *International Journal of Applied Technology & Leadership*, 3(1), 1–13.
- Malik, G. (2025). Analiza ryzyka cenowego wybranych produktów rolnych na podstawie rozkładów ekstremalnych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Ekonomii i Informatyki w Krakowie*, (21), 123–142. <https://doi.org/10.60154/ZeszytyNaukoweWSEI.2025.21.1.07>.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas* (wyd. 2). Springer Verlag. <https://doi.org/10.1007/0-387-28678-0>.
- Nikoloulopoulos, A. K., Karlis, D. (2008). Copula model evaluation based on parametric bootstrap. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(7), 3342–3353. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2007.10.028>.
- Pinheiro, C. A. O., de Senna, V., Matsumoto, A. S. (2016). Price forecasting for future contracts on agribusiness through neural network and multivariate spectral analysis. *Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade*, 6(3), 98–124. <https://doi.org/10.18028/rgfc.v6i3.1959>.
- Plackett, R. L. (1965). A class of bivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 60(310), 516–522. <https://doi.org/10.1080/01621459.1965.10480807>.
- Schweizer, B., Sklar, A. (1974). Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables. *Studia Mathematica*, 52(1), 43–52. <http://eudml.org/doc/217948>.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à N dimensions et leurs marges. *Annales de l'Institut Statistique de l'Université de Paris*, 8(3), 229–231. <https://hal.science/hal-04094463/document>.
- Sun, Y. (2025). Performance of Pairs Trading Strategies Based on Various Copula Methods. *Journal of Risk and Financial Management*, 18(9), 1–60. <https://doi.org/10.3390/jrfm18090506>.
- van den Goorbergh, R. W. J., Genest, C., Werker, B. J. M. (2005). Bivariate option pricing using dynamic copula models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 37(1), 101–114. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.01.008>.
- Yan, J. (2007). Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula. *Journal of Statistical Software*, 21(4), 1–21. <https://doi.org/10.18637/jss.v021.i04>.
- Yıldırım, E., Cengiz, M. A. (2024). Stochastic Copula Approach for Modeling Dependency: Evidence from Commodity and Exchange Rate Markets. *İstatistik Araştırma Dergisi. Journal of Statistical Research*, 14(1), 1–18. <https://izlik.org/JA88SL54US>.