

Cena 15,00 zł
(VAT 8%)

Indeks 381306
e-ISSN 2543-8476
PL ISSN 0043-518X

70 lat years

WIADOMOŚCI STATYSTYCZNE

THE POLISH STATISTICIAN

MAJ / MAY
ROCZNIK / VOLUME 71

2026 | 5

GŁÓWNY URZĄD STATYSTYCZNY
STATISTICS POLAND

POLSKIE TOWARZYSTWO STATYSTYCZNE
POLISH STATISTICAL ASSOCIATION



70 lat
years **WIADOMOŚCI
STATYSTYCZNE**
THE POLISH STATISTICIAN

MAJ / MAY
ROCZNIK / VOLUME 71

2026 | 5 (780)

ZESPÓŁ REDAKCYJNY / EDITORIAL BOARD

Rada Naukowa / Science Board

prof. dr hab. Tomasz Panek – przewodniczący/Chairman (Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Polska), Prof. Samuel Kobina Annim (University of Cape Coast, Ghana), Anthony Arundel, Assoc. Prof. (Maastricht University, Holandia), Atanas Atanassov, PhD, Assoc. Prof. (University of National and World Economy, Bułgaria), Eric Bartelsman, PhD, Prof. (Vrije Universiteit Amsterdam, Holandia), Maria Teresa Borges Tiago, PhD, Assoc. Prof. (University of the Azores, Portugal), prof. dr hab. Czesław Domański (Uniwersytet Łódzki, Polska), prof. dr hab. Elżbieta Gołata (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Polska), Semen Matkovskyy, PhD, Assoc. Prof. (Ivan Franko National University of Lviv, Ukraina), prof. dr hab. Włodzimierz Okrasa (Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie, Polska), prof. dr hab. Józef Oleński (Polskie Towarzystwo Statystyczne, Polska), Juan Manuel Rodríguez Poo, PhD, Assoc. Prof. (University of Cantabria, Hiszpania), dr Dominik Rozkrut (Uniwersytet Szczeciński, Polska), Iveta Stankovičová, BEng, PhD, Assoc. Prof. (Comenius University in Bratislava, Słowacja), Georges-Simon Ulrich, PhD, Assoc. Prof. (Zurich University of Applied Sciences in Business Administration, Szwajcaria), prof. dr hab. Marek Walesiak (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Polska)

Rada Konsultacyjna / Advisory Board

Tudorel Andrei, PhD, Assoc. Prof. (Bucharest University of Economic Studies, Rumunia), mgr Renata Bielak (Główny Urząd Statystyczny, Polska), dr hab. Grażyna Dehnel, prof. UEP (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Polska), dr Jacek Kowalewski (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Polska), Steve MacFeely, Assoc. Prof. (University College Cork, Irlandia), prof. dr hab. Mateusz Pipień (Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Polska), Marek Rojiček, BEng, PhD (Prague University of Economics and Business, Czechy), Anna Shostya, PhD, Assoc. Prof. (Pace University, Stany Zjednoczone), Athanasios Thanopoulos, PhD, DEEQA (Eurostat)

Redakcja / Editorial Team

redaktor naczelny / Editor-in-Chief: dr hab. Marek Cierpień-Wolan, prof. UR (Uniwersytet Rzeszowski, Polska)
zastępca redaktora naczelnego / Deputy Editor-in-Chief: dr hab. Andrzej Młodak, prof. UK (Uniwersytet Kaliski im. Prezydenta Stanisława Wojciechowskiego, Polska)
redaktorzy tematyczni / Thematic Editors: dr Xawery Stańczyk (Uniwersytet Łódzki, Polska), dr hab. Małgorzata Tarczyńska-Łuniewska, prof. US (Uniwersytet Szczeciński, Polska), dr Wioletta Wrzaszcz (Instytut Ekonomiki Rolnictwa i Gospodarki Żywnościowej – Państwowy Instytut Badawczy, Polska), dr inż. Agnieszka Zgierska (Główny Urząd Statystyczny, Polska)

ADRES REDAKCJI I KONTAKT / EDITORIAL OFFICE ADDRESS AND CONTACT

Główny Urząd Statystyczny / Statistics Poland, al. Niepodległości 208, 00-925 Warszawa, ws.stat.gov.pl
sekretarz redakcji / Editorial Secretary: Małgorzata Zygmunt
redaktor zarządzający systemem redakcyjnym / Editorial System Managing Editor: Krzysztof Sztafa
e-mail: redakcja.ws@stat.gov.pl, tel./phone +48 22 608 32 25

Redakcja językowa: Wydział Publikacji Naukowych, Departament Analiz i Udostępniania Informacji, Główny Urząd Statystyczny

Language editing: Scientific Publications Division, Analyses and Dissemination Department, Statistics Poland

Redakcja techniczna, skład i łamanie, opracowanie materiałów graficznych i korekta:

Zakład Wydawnictw Statystycznych, Centrum Informatyki Statystycznej – zespół pod kierunkiem Mariusza Męciny

Technical editing, typesetting, preparation of graphic materials and proofreading:

Statistical Publishing Establishment, Statistical Computing Center – team supervised by Mariusz Męcina

Wersja elektroniczna, stanowiąca wersję pierwotną czasopisma, jest dostępna na ws.stat.gov.pl
The primary version of the journal, issued in electronic form, is available at ws.stat.gov.pl

© Copyright by Główny Urząd Statystyczny and the authors, some rights reserved. CC BY-SA 4.0 licence



Centrum Informatyki
Statystycznej

Druk i oprawa / Printed and bound by:

Centrum Informatyki Statystycznej / Statistical Computing Center
al. Niepodległości 208, 00-925 Warszawa, cis.stat.gov.pl

Informacje w sprawie sprzedaży i prenumeraty czasopisma / Sales and subscription of the journal:

Centrum Informatyki Statystycznej / Statistical Computing Center

e-mail: cis-sprzedaz@stat.gov.pl, tel./phone +48 22 608 32 10, +48 22 608 38 10

SPIS TREŚCI CONTENTS

Od redakcji	IV
From the Editorial Team	
 Studia metodologiczne Methodological studies	
Grzegorz Kończak Zalety i ograniczenia wnioskowania w modelu permutacyjnym Fishera-Pitmana	1
The advantages and limitations of inference in the Fisher-Pitman permutation model	
 Statystyka w praktyce Statistics in practice	
Grażyna Węgrzyn, Danuta Miłaszewicz, Marcin Salamaga Differences in the ways of spending leisure time by Generation Z tertiary students before and after the COVID-19 pandemic	27
Różnice w sposobach spędzania czasu wolnego przez studentów z pokolenia Z przed pandemią COVID-19 i po jej zakończeniu	
 Studia interdyscyplinarne. Wyzwania badawcze Interdisciplinary studies. Research challenges	
Adam Krawiec, Anna Poleć, Tomasz Tokarski Wpływ technologii zależnej od kapitału na pracującego na równowagę uogólnionego modelu Solowa	45
The influence of technology dependent on capital-labour ratio on the equilibrium of the generalised Solow model	
 Dyskusje. Recenzje. Informacje Discussions. Reviews. Information	
Joanna Sadowy Wydawnictwa GUS. Kwiecień 2026	71
Publications of Statistics Poland. April 2026	
 Dla autorów	73
For the authors	
 Działy „WS” – tematyka artykułów	92
WS sections – topics of the article	

OD REDAKCJI

W majowym numerze „Wiadomości Statystycznych. The Polish Statistician” polecamy Państwu lekturę trzech artykułów naukowych. Pierwszy dotyczy zagadnień metodologicznych, drugi zawiera omówienie wyników badania przeprowadzonego z użyciem metod statystycznych, a trzeci wpisuje się w nurt wyzwań badawczych.

Praca prof. dr. hab. Grzegorza Kończaka *Zalety i ograniczenia wnioskowania w modelu permutacyjnym Fishera-Pitmana* dotyczy alternatywy dla klasycznego wnioskowania statystycznego, opartego na modelu populacyjnym Neymana-Pearsona. Autor zaznacza, że testy, które wykorzystuje się do weryfikacji hipotez w modelu permutacyjnym, nie wymagają założeń dotyczących postaci rozkładów zmiennych losowych i są efektywne dla małych prób. Wskazuje kluczowe zalety i możliwości wykorzystywania modelu Fishera-Pitmana, zwłaszcza w badaniach ekonomicznych, oraz przedstawia argumenty za jego częstszym stosowaniem w analizach, w których klasyczne podejście populacyjne okazuje się niewystarczające lub niemożliwe do zastosowania. Na przykładzie oceny zmian współczynnika urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach według województw w latach 2023–2024 badacz pokazuje praktyczną wartość prezentowanej metody. Dowodzi, że wnioskowanie permutacyjne umożliwia wykrywanie istotnych różnic nawet przy porównywaniu grup nielosowych. Model permutacyjny może znaleźć zastosowanie również w analizie danych z pełnych (niepróbkowych) zbiorów, w przypadku których tradycyjne testy parametryczne są nieadekwatne.

Differences in the ways of spending leisure time by Generation Z tertiary students before and after the COVID-19 pandemic to temat artykułu dr hab. Grażyny Węgrzyn, prof. UEW, dr hab. Danuty Miłaszewicz, prof. US, i prof. dr. hab. Marcina Salamagi. Jak wskazują autorzy, różnice w sposobie spędzania czasu wolnego przez młodych ludzi stanowią ważny wskaźnik przemian społecznych i gospodarczych. Próbuje oni zidentyfikować zmiany, jakie zaszły w budżecie czasu i strukturze aktywności wolnoczasowych studentów z pokolenia Z w Polsce po zakończeniu pandemii COVID-19 w porównaniu z okresem przed jej wybuchem, ze szczególnym uwzględnieniem płci i roli pracy zarobkowej. Analizują wyniki trzech fal badania ankietowego: z 2018 r., 2020 r. (obie przed wybuchem pandemii) i 2023 r. Aby ocenić zmiany, stosują analizę wariancji, testy chi-kwadrat i testy *t*-Studenta. Stwierdzają, że w latach 2018–2023 nastąpiła znaczna reorganizacja budżetu czasu przy jednoczesnym utrzymywaniu się różnic między płciami w zakresie sposobów jego wykorzystania. W szczególności zmniejszyło się znaczenie nauki, a zwiększyła się rola pracy zarobkowej i rozrywki cyfrowej. Może to wskazywać na rosnącą presję na łączenie nauki z pracą oraz wzrost znaczenia indywidualnych form uczenia się, wykraczających poza zakres studiów uniwersyteckich.

W pracy *Wpływ technologii zależnej od kapitału na pracującego na równowagę uogólnionego modelu Solowa* dr hab. Adam Krawiec, prof. UJ, mgr Anna Połec i prof. dr hab. Tomasz Tokarski stawiają sobie dwa cele. Pierwszym jest uogólnienie modelu wzrostu Solowa, a drugim – pokazanie, że może w nim istnieć więcej niż jeden nietrywialny punkt stacjonarny. Autorzy wyjaśniają, że w neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego, opierającego się na modelu Solowa-Swana, technologia ma charakter egzogeniczny, natomiast inaczej rzecz ma się w modelach, w których technologia jest

kształtowana endogenicznie. Proponują zatem alternatywne uogólnienie modelu Solowa z technologią endogeniczną. Badają dynamikę tego modelu, wyznaczają punkty stacjonarne, analizują ich stabilność i przedstawiają warunki istnienia stabilnego stanu stacjonarnego. Przeprowadzają również symulacje numeryczne w celu wyznaczenia trajektorii badanych zmiennych makroekonomicznych. Wykazują, że powyżej granicznej stopy oszczędności/inwestycji istnieją dwa nietrywialne punkty stacjonarne. Ponadto im wyższa wartość stopy oszczędności/inwestycji w tej sytuacji, tym większa rozpiętość przedziału pomiędzy wartościami kapitału na pracującego w nietrywialnych punktach stacjonarnych badanego modelu wzrostu. Niestabilny punkt stacjonarny wyznacza granicę ubóstwa i ma kluczowe znaczenie dla zmiennych makroekonomicznych – wysokiej stopie oszczędności/inwestycji towarzyszy niskie prawdopodobieństwo tego, że w gospodarce charakteryzującej się dodatnim kapitałem na pracującego wartości podstawowych zmiennych makroekonomicznych na pracującego będą w długim okresie dążyć do zera.

W numerze tradycyjnie znajdują Państwo również przegląd najnowszych publikacji GUS, przygotowany przez Joannę Sadowy.

Życzymy inspirującej lektury.

FROM THE EDITORIAL TEAM

The May issue of *Wiadomości Statystyczne. The Polish Statistician* features three scientific articles. The first deals with methodological issues, the second discusses the results of a study conducted using statistical methods, and the third addresses current research challenges.

The paper by Grzegorz Kończak, PhD, DSc, ProfTit, entitled *The advantages and limitations of inference in the Fisher-Pitman permutation model* presents an alternative to classical statistical inference based on the Neyman-Pearson population model. The author points out that the tests used to verify hypotheses in the permutation model do not require assumptions about the form of random variable distributions and are effective for small samples. He highlights the key advantages and applications of the Fisher-Pitman model, particularly in economic research, and presents arguments for its more frequent use in analyses where the classical population approach proves insufficient or impossible to apply. Using the example of assessing changes in the live birth rate per 1,000 population in powiats by voivodship in the years 2023–2024, the researcher shows the practical value of the presented method. He demonstrates that permutation inference allows the detection of significant differences even when comparing non-random groups. The permutation model can also be applied to the analysis of data from full (non-sample) datasets, for which traditional parametric tests are inadequate.

In *Differences in the ways of spending leisure time by Generation Z tertiary students before and after the COVID-19 pandemic*, Grażyna Węgrzyn, PhD, DSc, Professor at the Wrocław University of Economics and Business, Danuta Miłaszewicz, PhD, DSc, Professor at the University of Szczecin, and Marcin Salamaga, PhD, DSc, ProfTit point out that differences in how young people spend their leisure time are an important indicator of social and economic change. The authors try to identify changes in the time allocation and structure of leisure activities of Generation Z tertiary students in Poland following the end of the COVID-19 pandemic compared to the period before its outbreak, with a particular emphasis on gender and the role of paid work. They analyse the results of three waves of a relevant survey: from 2018, 2020 (both prior to the outbreak of the pandemic) and 2023. To assess the changes, they employ the analysis of variance, chi-square tests and Student's

t-tests. They find that between 2018 and 2023, there was a significant reorganisation of the time budget, while gender differences in the ways of spending leisure persisted. More specifically, the importance of studying declined, whereas the role of paid work and digital entertainment increased. This may indicate a growing pressure to combine study with work and an increase in the importance of individual forms of learning that go beyond the scope of university studies.

In the paper *The impact of working capital-dependent technology on the equilibrium of the generalised Solow model*, Adam Krawiec, PhD, Professor at the Jagiellonian University in Kraków, DSc, Anna Połec, MSc, and Tomasz Tokarski, PhD, DSc, ProfTit, set themselves two objectives. The first is to generalise the Solow growth model, and the second is to demonstrate that there may be more than one non-trivial stationary point within it. The authors explain that in the neoclassical economic growth theory based on the Solow-Swan model, technology is exogenous, whereas this is not the case in models where technology is shaped endogenously. They therefore propose an alternative generalisation of the Solow model with endogenous technology. They examine the dynamics of this model, determine the stationary points, analyse their stability, and present the conditions for the existence of a stable stationary state. They also carry out numerical simulations to determine the trajectories of the studied macroeconomic variables. They demonstrate that above the critical savings/investment ratio, there are two non-trivial stationary points. Furthermore, the higher the savings/investment ratio in this situation, the greater the spread between capital-labour ratios at the non-trivial stationary points of the studied growth model. The unstable stationary point defines the poverty line and is of crucial importance for macroeconomic variables. This means a high savings/investment ratio is accompanied by a low probability that, in an economy characterised by positive capital per worker, the values of key macroeconomic variables per worker will tend towards zero in the long run.

As usual, the issue concludes with an overview of Statistics Poland's latest publications, prepared by Joanna Sadowy.

We wish you inspiring reading.

Zalety i ograniczenia wnioskowania w modelu permutacyjnym Fishera-Pitmana

The advantages and limitations of inference in the Fisher-Pitman permutation model

Grzegorz Kończak^a

Streszczenie. Klasyczne wnioskowanie statystyczne opiera się na modelu populacyjnym Neymana-Pearsona. Alternatywą dla niego jest model permutacyjny, wykorzystywany znacznie rzadziej, ale mający wiele zalet. Do weryfikacji hipotez wykorzystuje się w nim testy permutacyjne, które nie wymagają założeń dotyczących postaci rozkładów zmienionych losowych i są szczególnie zalecane w przypadku bardzo małych prób. Wnioskowanie statystyczne można przeprowadzać także dla ustalonych prób nielosowych. Celem artykułu jest wskazanie kluczowych zalet i możliwości zastosowania wnioskowania statystycznego opartego na modelu permutacyjnym Fishera-Pitmana w badaniach naukowych, zwłaszcza analizach ekonomicznych. Przedstawiono argumenty przemawiające za częstszym wykorzystywaniem modelu permutacyjnego w analizach, w których klasyczne podejście populacyjne okazuje się niewystarczające lub niemożliwe do wykorzystania. Opisane zostały także ograniczenia testów permutacyjnych. Praktyczną wartość tych metod zilustrowano na przykładzie oceny zmian współczynnika urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach według województw w latach 2023 i 2024. Z analizy wynika, że wnioskowanie permutacyjne umożliwia wykrywanie istotnych różnic nawet przy porównywaniu grup nielosowych.

Słowa kluczowe: wnioskowanie statystyczne, model populacyjny, model permutacyjny, testy permutacyjne

^a Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Wydział Zarządzania, Katedra Statystyki, Ekonometrii i Matematyki, Polska / University of Economics in Katowice, Faculty of Management, Department of Statistics, Econometrics and Mathematics, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4696-8215>. E-mail: grzegorz.konczak@ue.katowice.pl.

Abstract. Classical statistical inference is based on the Neyman-Pearson population model. An alternative to it is the permutation model, which is used much more rarely, but which has many advantages. In the permutation model, hypothesis testing is performed using permutation tests, which do not require assumptions regarding the form of random variable distributions, and which are especially recommended for very small samples. It is also possible to perform statistical inference for fixed, non-random groups. The aim of this article is to indicate key advantages and possibilities of applying statistical inference based on the Fisher-Pitman permutation model to scientific research, particularly in the field of economics. The article presents arguments in favour of the wider use of the permutation model in analyses where the classical population approach is insufficient or impossible to use. The article also shows the limitations of permutation tests. Their practical worth is demonstrated on the example of the assessment of changes in the live birth rate per 1,000 population in powiats by voivodship in 2023 and 2024. The analysis showed that permutation inference allows the detection of significant differences even when comparing non-random groups.

Keywords: statistical inference, population model, permutation model, permutation tests

JEL: C12, C14, C15

1. Wprowadzenie

Metody statystyczne stanowią podstawę wielu badań naukowych w różnych dziedzinach i dyscyplinach nauki. Są wykorzystywane w fizyce, astronomii, inżynierii, rolnictwie, medycynie, farmakologii, badaniach klinicznych, psychologii, genetyce, zarządzaniu, kontroli jakości, ekonomii i finansach, a także w wielu innych dyscyplinach i subdyscyplinach naukowych.

Wśród metod statystycznych wyróżnia się metody statystyki opisowej i metody wnioskowania statystycznego, co wprost odzwierciedlają tytuły monografii zarówno w pierwszym (Alcocer, 2016; Sobczyk, 2010), jak i drugim przypadku (Domański i in., 2014; Greń, 1974; Ostasiewicz, 2014). Statystyka opisowa obejmuje opis zbioru danych, konstrukcję i interpretację miar statystycznych oraz ich właściwości. Pozwala na przedstawienie charakterystyki ustalonego zbioru danych. Z kolei metody wnioskowania statystycznego, oparte na teorii prawdopodobieństwa, umożliwiają uogólnianie wyników z próby na całą populację.

Oprócz podziału na statystykę opisową i wnioskowanie statystyczne stosuje się również podział metod statystycznych na parametryczne i nieparametryczne. Istnieje wiele monografii szczegółowo opisujących metody parametryczne (Geisser, 2006; Good, 2005; Hald, 2007) i publikacji poświęconych metodom nieparametrycznym (Corder i Foreman, 2014; Gibbons i Chakraborti, 2011; Wasserman, 2006). W literaturze można znaleźć także prace omawiające oba podejścia (Lehmann, 2009; Sheskin, 2004). Metody parametryczne wiążą się z wymaganiami dotyczącymi założeń o rozkładzie analizowanych zmiennych (w tym kontekście wymagany jest zazwyczaj rozkład normalny). Różnica między tymi dwoma rodzajami metod jest szczególnie widoczna w przypadku estymacji parametrów populacji i weryfikacji hipotez statystycznych. Testy parametryczne są zazwyczaj bardzo efektywne, jednak mogą być stosowane tylko wtedy, gdy spełnione są określone założenia. W praktyce badań ekonomicznych bardzo często te założenia nie są spełnione, a zwykle nawet nie są weryfikowane. Już Geary (1947) wskazywał, że normalność to mit (nigdy nie było i nie będzie rozkładu normalnego), a założenie normalności rozkładu jest typowe w metodach parametrycznych. I chociaż miał świadomość, że ta teza jest przerysowana, to wiedział też, że zabezpiecza przed zbyt pochopnym stosowaniem metod w warunkach niespełnienia wymaganych założeń. Testy nieparametryczne nie wymagają spełnienia tak rygorystycznych założeń dotyczących postaci rozkładu analizowanych zmiennych, ale zwykle charakteryzują się nieco mniejszą mocą niż testy parametryczne (gdy stosowane założenia dla tych ostatnich są spełnione).

Wskazane powyżej metody wnioskowania statystycznego opierają się na dobrze znanym modelu populacyjnym (Neyman i Pearson, 1933; zob. też Lehmann, 2011). Alternatywą dla niego jest model permutacyjny, stosowany znacznie rzadziej. Znalazł

on dość szerokie zastosowanie w niektórych dyscyplinach naukowych (biologia, genetyka, medycyna czy psychologia), ale bardzo rzadko wykorzystuje się go w naukach ekonomicznych. Model permutacyjny pozwala na alternatywne podejście do wnioskowania statystycznego w stosunku do modelu klasycznego. Podstawowe zastosowanie tego modelu jest związane z testami permutacyjnymi, zaproponowanymi przez Fishera (1925) i sformalizowanymi przez Pitmana (1937a, 1937b, 1938). Berry i in. (2014) wskazują, że Geary (1927) oraz Eden i Yates (1933) również wnieśli znaczący wkład w rozwój teorii tych testów. Metody permutacyjne zostały wykorzystane nieco wcześniej przez Splawę-Neymana¹ (1923/1990) w kontekście eksperymentów polowych, jednak jego publikacja przez długi czas pozostawała nieznaną w światowym środowisku statystyków, ponieważ została przetłumaczona na język angielski dopiero po 67 latach (Bednarski, 2013; Berry i in., 2021; Ledwina, 2012; Lehmann i Romano, 2005).

Ostatnie dekady bardzo zmieniły oblicze metod statystycznych. Stało się to głównie za sprawą dynamicznego wzrostu możliwości obliczeniowych komputerów (Kerns, 2010). Nowy rozdział w historii statystyki jest związany nie tylko z możliwością szybkiego wykonywania złożonych analiz statystycznych, lecz przede wszystkim z rozwojem metod wykorzystujących moc obliczeniową współczesnych komputerów, takich jak metody symulacyjne (w tym metody repróbkiwania, np. bootstrap czy testy permutacyjne). Zauważalny jest rozwój technik wnioskowania opartych na metodach bootstrapowych i reprobkiwaniu (Davison i Hinkley, 1997; Efron, 1982; Efron i Tibshirani, 1993; Manly, 1997). Kluczowe dla tych metod jest założenie, że rozkład estymatora lub statystyki testowej można oszacować na podstawie ponownego próbkowania (Phipson i Smyth, 2011).

Oprócz rozwoju metod bootstrapowych obserwuje się wzrost znaczenia metod permutacyjnych, głównie testów permutacyjnych. Test permutacyjny jest rodzajem nieparametrycznego testu randomizacji, w którym rozkład statystyki testowej, przy założeniu hipotezy H_0 , jest szacowany poprzez losową permutację etykiet klas obserwacji. Testy permutacyjne okazują się bardzo atrakcyjne, ponieważ nie wymagają spełnienia żadnych innych założeń poza tym, że obserwacje są niezależne i wymienne w ramach hipotezy zerowej. Mogą być stosowane, gdy standardowe założenia dotyczące rozkładu nie są spełnione lub gdy rozkład teoretyczny statystyki testowej jest niemożliwy do wyznaczenia.

Model populacyjny jest powszechnie znany i szeroko stosowany w badaniach naukowych. Model permutacyjny jest znacznie mniej znany i bardzo rzadko wykorzystywany. Celem artykułu jest wskazanie kluczowych zalet i możliwości zastosowania

¹ Jerzy Neyman używał nazwiska rodzowego „Splawa” tylko przy swoich pierwszych publikacjach (przyp. red.).

wnioskowania statystycznego opartego na modelu permutacyjnym Fishera-Pitmana w badaniach naukowych, zwłaszcza analizach ekonomicznych.

2. Model populacyjny Neymana-Pearsona

Pod koniec lat 20. i na początku lat 30. XX w. Neyman i Pearson sformalizowali ramy decyzyjne wnioskowania statystycznego, wprowadzając koncepcję hipotezy zerowej i alternatywnej, błędów I i II rodzaju oraz mocy testu (Neyman i Pearson, 1928a, 1928b, 1933; zob. też Lehmann, 2011). Ich prace miały ogromny wpływ na rozwój metodologii eksperymentalnej, zwłaszcza w naukach przyrodniczych i medycznych, w których kluczowe jest podejmowanie decyzji na podstawie danych z określonym poziomem ryzyka. W tym modelu przyjmuje się poziom istotności α (najczęściej $\alpha = 0,01$; $0,05$ lub $0,1$). Test jest tak konstruowany, aby przy ustalonym prawdopodobieństwie popełnienia błędu I rodzaju (odrzuć prawdziwej hipotezy H_0) wynoszącym co najwyżej α minimalizowane było prawdopodobieństwo β popełnienia błędu II rodzaju (brak odrzucenia hipotezy H_0 , gdy jest ona fałszywa). Moc testu, czyli prawdopodobieństwo słusznego odrzucenia H_0 , gdy H_1 jest prawdziwa, stanowi jedno z głównych kryteriów oceny jakości testu statystycznego. Metoda Neymana-Pearsona umożliwia konstrukcję testów o maksymalnej mocy dla zadanego poziomu istotności, co czyni ją bardzo atrakcyjną w zastosowaniach, w których istotność wyników ma kluczowe znaczenie.

Model populacyjny jest standardowym modelem nauczonym na zajęciach wprowadzających w zagadnienia wnioskowania statystycznego (Berry i in., 2021). Ma jednak wiele ograniczeń wynikających z założeń, które często nie są spełnione w praktyce, w szczególności w badaniach ekonomicznych. Do głównych założeń należy zaliczyć: losowy dobór prób z określonej populacji, wzajemną niezależność obserwacji w próbie, zwykle konieczną znajomość postaci rozkładu badanych zmiennych (najczęściej rozkład normalny) i niekiedy jednorodność wariancji. W badaniach naukowych często uzyskuje się realizację pomiarów losowych dla wszystkich obiektów badanej populacji, np. województw, powiatów czy gmin. Przykładem może być analiza wskaźników ekonomicznych dla powiatów w Polsce, gdy dostępne są wartości dla wszystkich jednostek. W takich przypadkach nie ma możliwości odwołania się do modelu populacyjnego. Alternatywą staje się model permutacyjny, który pozwala na prowadzenie wnioskowania bez konieczności spełniania restrykcyjnych założeń modelu populacyjnego, a tym samym lepiej odpowiada na potrzeby analizy danych pełnych, często spotykanych w badaniach społeczno-ekonomicznych.

3. Model permutacyjny Fishera-Pitmana

Początki teorii metod permutacyjnych są związane z wczesnymi pracami Neymana, Fishera i Pitmana z lat 20. i 30. XX w. Zastosowania tych metod wymagają dużych nakładów obliczeniowych i dopiero pojawienie się szybkich komputerów umożliwiło ich wykorzystanie. Dlatego metody statystyczne oparte na modelu permutacyjnym stały się praktyczną alternatywą dla klasycznych metod statystycznych dopiero w ciągu ostatnich 30 lat.

Berry i in. (2019) wskazują, że w latach 20. XX w. pojawiły się trzy prace na temat wykorzystania metod permutacyjnych we wnioskowaniu statystycznym. Pierwszą z nich był artykuł Splawy-Neymana (1923/1990), drugą – rozdział autorstwa Fishera (1925) opublikowany w jego pierwszej książce, zatytułowanej *Statistical Methods for Research Workers*, a trzecią – artykuł Geary’ego (1927) na temat niektórych właściwości korelacji i regresji. Następnie Eden i Yates (1933) zastosowali metody permutacyjne do porównania rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym. W kolejnych artykułach Pitman (1937a, 1937b, 1938) wykazał, że wykorzystując dokładne struktury permutacyjne, można opracować testy istotności, które – w odróżnieniu od testów w modelu populacyjnym – nie wymagają założeń. Na ogół uznaje się, że to właśnie Pitman sformalizował teorię testów permutacyjnych (Berry i in., 2019).

Wnioskowanie statystyczne w modelu permutacyjnym znacznie różni się od wnioskowania klasycznego. Berry i in. (2021) wskazują, że testy permutacyjne są wolne od rygorystycznych założeń dotyczących postaci rozkładu, są całkowicie zależne od danych, mogą być stosowane dla prób nielosowych i idealnie nadają się do analizowania małych zbiorów danych. Brombin i Salmaso (2013), a także Todman i Dugard (2009) dodają, że stosowanie modelu permutacyjnego nie wymaga zakładania jednorodności wariancji ani nawet losowego próbkowania. Model permutacyjny wykorzystuje wyłącznie informacje z badanego zbioru danych (ang. *data-dependent*; Mielke i Berry, 2007). Decyzję w testach permutacyjnych podejmuje się na podstawie wartości *achieved significance level* (ASL; Efron i Tibshirani, 1993). Bardzo często ta wielkość jest określana tak samo jak w modelu populacyjnym jako wartość p (p -value) lub P . Wydaje się jednak, że ze względu na wnioskowanie w zasadniczo innym modelu niż model populacyjny warto stosować inne oznaczenie. Wartość p to prawdopodobieństwo uzyskania wyniku co najmniej tak ekstremalnego, jak ten zaobserwowany w próbie. ASL to proporcja permutacji, które dały wynik co najmniej tak ekstremalny, jak ten zaobserwowany w oryginalnych danych. Wartość ASL może być określona na podstawie wszystkich możliwych permutacji zbioru lub przybliżona z błędem w serii symulacji komputerowych określonym z góry. Do szacowania ASL stosuje się też niekiedy metodę aproksymacji rozkładu na podstawie momentów (Kończak, 2016).

Testy permutacyjne nie odnoszą się do żadnych konkretnych testów statystycznych, ale do ogólnej idei wyznaczenia wartości ASL. Można je określić dla dowolnego

(klasycznego) testu statystycznego i dla wybranej statystyki testowej. Badacze mają możliwość korzystania z szerokiej gamy statystyk testowych, w tym większości statystyk powszechnie wykorzystywanych w testach opartych na modelu populacyjnym. W najbardziej podstawowej formie modelu permutacyjnego statystyka testowa obliczana dla obserwowanych danych ma tę samą postać co statystyka testowa w modelu populacyjnym (Chihara i Hesterberg, 2011; Kończak, 2020; Mielke i Berry, 2007). Kluczem do wyboru postaci statystyki testowej jest to, że powinna ona przyjmować wartości z możliwie rozłącznych podzbiorów, gdy hipoteza zerowa jest prawdziwa i gdy jest fałszywa. Mielke i Berry (2007) zalecają stosowanie metrycznych funkcji odległości, np. odległości euklidesowej, aby uniknąć mylnych wniosków wynikających z niemetrycznych funkcji odległości, takich jak kwadratowa odległość euklidesowa wykorzystywana m.in. w testach parametrycznych t -Studenta i F .

Model populacyjny wymaga określenia populacji i próby losowej w celu przeprowadzenia wnioskowania statystycznego. W modelu permutacyjnym testowane próbki mogą – ale nie muszą – być pobierane losowo (Berry i in., 2019). Dla prób nielosowych nie ma możliwości uogólnienia wyników na populację, ale mimo wszystko możliwe jest wskazanie nieprzypadkowych różnic lub zależności występujących pomiędzy badanymi grupami. Kluczowym założeniem testów permutacyjnych jest wymiennność obserwacji przy założeniu hipotezy zerowej. Naruszenie tej zasady (np. w przypadku danych zależnych w czasie lub przestrzeni) może prowadzić do nieprawidłowych wniosków.

W literaturze przedmiotu wnioskowanie w modelu permutacyjnym jest określane różnie (Onghena, 2018): jako testy permutacyjne (ang. *permutation tests*), testy randomizacyjne (ang. *randomization tests*), a niekiedy testy rerandomizacyjne (ang. *rerandomization tests*). Te terminy czasami są stosowane zamiennie, a terminologia przyjmowana przez autorów nie jest jednolita. Według Gibbonsa (2006) test permutacyjny jest testem randomizacyjnym, którego rozkład odniesienia jest generowany przez permutacje, a według Edgingtona (2006), a także Edgingtona i Onghena (2007) test randomizacyjny jest testem permutacyjnym opartym na losowym przypisaniu. Ernst (2004), Good (2005) oraz Lehmann i Romano (2005) zalecają stosowanie określenia *testy permutacyjne* do wymienionych wyżej kategorii, ale wskazują na potrzebę wyraźnego określenia, czy wnioskowanie permutacyjne dotyczy prób losowych, czy jest związane wyłącznie z losowym permutowaniem etykiet. Ta pierwsza forma wnioskowania jest w jakiejś mierze zbliżona do wnioskowania klasycznego, za to druga wnosi wiele nowych możliwości. Ponieważ techniczna strona przeprowadzenia wnioskowania (obliczenie wartości statystyki, określenie rozkładu empirycznego) w obu przypadkach jest taka sama, w dalszej części artykułu będzie stosowane określenie *test permutacyjny*.

Pomimo wielu zalet model permutacyjny jest stosunkowo rzadko wykorzystywany w analizach ekonomicznych. W tabl. 1 przedstawiono liczbę artykułów naukowych

dotyczących testów permutacyjnych w różnych dyscyplinach, które zostały wyszukane w Google Scholar oraz specjalistycznych bazach czasopism, takich jak PubMed, Science Direct, Springer Nature i Wiley Library (wyszukiwane hasło to: *permutation tests* + nazwa dyscypliny). W rezultatach z Google Scholar wyodrębniono dane za pierwsze półrocze 2025 r., co pozwala ocenić zmiany proporcji liczby publikacji dla poszczególnych dyscyplin. Artykuły naukowe związane z testami permutacyjnymi dotyczą najczęściej biologii, medycyny, genetyki, kontroli jakości i zarządzania. Relatywnie niewiele jest takich prac w ekonomii. W naukach ekonomicznych znacznie częściej wykorzystuje się klasyczne metody parametryczne, co jest zwykle uzasadnione dla dużych zbiorów danych, a także klasyczne metody nieparametryczne. Biorąc pod uwagę dane za 2025 r., można dostrzec relatywny wzrost liczby publikacji z zakresu ekonomii, finansów i farmacji, w których jest mowa o stosowaniu testów permutacyjnych, w stosunku do pozostałych kategorii.

Tabl. 1. Liczba artykułów naukowych dotyczących testów permutacyjnych, opublikowanych w różnych dyscyplinach

Dyscypliny	Google Scholar ^a		PubMed	Science Direct	Springer Nature	Wiley Library
		w tym I półrocze 2025 r.				
Biology (biologia)	82 600	4 310	284	9 143	1 983	7 212
Economy (ekonomia)	18 000	1 850	39	1 747	281	1 436
Engineering (inżynieria)	24 800	1 690	190	6 978	714	4 179
Finance (finanse)	18 000	2 210	37	1 086	120	1 734
Genetics (genetyka)	48 500	3 360	599	4 508	1 858	6 518
Management (zarządzanie)	69 100	3 910	103	10 269	2 998	3 712
Medicine (medycyna)	59 500	3 810	453	11 681	1 444	3 931
Pharmacology (farmakologia)	11 800	1 040	144	3 841	194	937
Psychology (psychologia)	23 100	1 760	152	4 775	607	1 507
Quality control (kontrola jakości)	65 500	4 080	28	18 848	4 997	6 653

a Wyszukiwarka podaje przybliżone wartości.

Źródło: opracowanie własne na podstawie wyszukiwania w bazach przeprowadzonego 14 lipca 2025 r.

4. Charakterystyka, zalety i ograniczenia wnioskowania w modelu permutacyjnym

Berry i in. (2014) wskazują, że permutacyjne metody statystyczne paradoksalnie są zarówno stare, ponieważ zostały zaproponowane w latach 20. i 30. XX w., jak i nowe, ponieważ praktycznie wykorzystywane są dopiero w ostatnich dziesięcioleciach. Statystycy z początku XX w. dobrze rozumieli wartość tych metod, nawet w czasach, gdy ich intensywny obliczeniowo charakter czynił je niepraktycznymi (Berry i in., 2016). Znaczenie podejścia permutacyjnego w rozwiązywaniu wielu problemów wnioskowania jest dobrze udokumentowane w literaturze statystycznej (Corain i in.,

2016). Pesarin i Salmaso (2010) podkreślają, że wnioskowanie permutacyjne jest ważne zarówno dla celów teoretycznych, jak i aplikacyjnych. Ponadto założenia dotyczące ważności większości metod parametrycznych (takich jak homoskedastyczność, normalność czy losowe pobieranie próbek) rzadko występują w rzeczywistych problemach badawczych (Pesarin i Salmaso, 2010). W ciągu ostatnich 30 lat testy permutacyjne stały się użyteczne dla naukowców różnych dyscyplin. Todman i Dugard (2009) doszli do wniosku, że gdyby sprzęt komputerowy, jakim dysponujemy obecnie, był dostępny w czasach Fishera i Pitmana, to statystyka byłaby teraz w zupełnie innym miejscu.

4.1. Wybrane zastosowania metod permutacyjnych w statystyce

Metody permutacyjne znalazły szerokie zastosowania w różnych zagadnieniach dotyczących rozwiązywania problemów statystycznych. Pierwsze użycie metod permutacyjnych dotyczyło doświadczeń w rolnictwie (Spława-Neyman, 1923/1990). W tej pracy został skonstruowany formalny model matematyczny do analizy eksperymentów z losowym przydziałem do grup wraz z zastosowaniem w rolnictwie. Praca zawierała logiczne podstawy testów permutacyjnych, mimo że sam Spława-Neyman nie używał takiego określenia.

Ważną zaletą testów permutacyjnych jest kontrolowanie rozmiaru testu na poziomie przyjętego poziomu istotności α , co wynika bezpośrednio z ich konstrukcji. Pauly i in. (2005) w obszernym badaniu symulacyjnym przeanalizowali właściwości testów permutacyjnych dla małych prób i heteroskedastyczności. Wykazali, że nawet w przypadku braku wymienności te testy dość dobrze kontrolują poziom błędów typu I. Konietschke i Pauly (2012) przeprowadzili badania symulacyjne w celu zbadania właściwości testu permutacyjnego dla problemu Behrensa-Fishera dla danych sparowanych. Symulacje te potwierdziły skuteczność testu permutacyjnego dla danych wymiennych, jak również dla danych niewymiennych wygenerowanych dla różnych rozkładów (normalny, wykładniczy, logarytmiczno-normalny). Także Mielke i Berry (1994) wskazują, że metody permutacyjne są skuteczne w porównywaniu wartości oczekiwanych dla małych prób nawet przy niejednakowych wariancjach w grupach.

Anderson (2001) przedstawił zastosowania metod permutacyjnych w jedno- i wielowymiarowej analizie regresji. Antoch i Hušková (2001), a także Kończak i Stąpor (2023) wykorzystali te metody do wykrywania punktu zmiany trendu w szeregach czasowych. Sommer i in. (2022) zastosowali metody permutacyjne do wykrywania zmian w procesie uczenia się rozpoznawania twarzy. Dufour i in. (2019) wskazali na skuteczność metod permutacyjnych w testowaniu równości indeksów Giniego przy badaniu nierówności ekonomicznych, a Kończak i Kosińska (2025) zastosowali testy permutacyjne w analizie danych w wielowymiarowych tablicach wielodzielczych.

Bonnini i Assegie (2022) wykorzystali funkcje łączące do badania rzeczywistych zależności wielowymiarowych i zbadali symulacyjnie moc połączonych testów permutacyjnych. Stąpor i in. (2025) zaprezentowali alternatywne rozwiązania dla problemu wielokrotnego testowania hipotez – na podstawie sekwencji testów permutacyjnych wykrywa się zbiór korelacji istotnych dla analizowanych zmiennych. Arboretti i in. (2014) przedstawili rozwiązania oparte na permutacjach, których użyto do konstrukcji rankingu populacji wielowymiarowych. Zaletą metody jest niezależność od metryki. Można ją stosować do dowolnego rodzaju zmiennych odpowiedzi (ciągłych, binarnych, porządkowych i jakościowych, a także mieszanych). Corain i in. (2016) wskazują, że permutacyjne podejście do rankingu populacji wielowymiarowych może być bardzo przydatne w ramach oceny satysfakcji klientów, ponieważ tego typu badania często charakteryzują się wielowymiarową, uporządkowaną odpowiedzią, dla której tradycyjne podejście parametryczne nie zapewnia skutecznych narzędzi. Bonnini i in. (2024) omawiają osiągnięcia naukowe w zakresie wykorzystania metod permutacyjnych do testowania hipotez.

4.2. Wnioskowanie permutacyjne na podstawie prób losowych

Testy permutacyjne mogą być przeprowadzane dla wielu przypadków, dla których nie istnieje standardowy test parametryczny lub nieparametryczny (Todman i Dugard, 2009). Jedną z największych zalet testów permutacyjnych jest to, że struktura statystyki testowej nie jest z góry określona (Mielke i Berry, 2007). Testy permutacyjne pozwalają wybrać formę statystyki testowej. Ta swoboda wyboru otwiera tysiące praktycznych zastosowań, w tym wiele takich, które są poza zasięgiem konwencjonalnych statystyk parametrycznych (Good, 2006). Testy permutacyjne oferują znacznie większą swobodę niż testy klasyczne, ponieważ mogą być realizowane z dowolną statystyką testową (Chihara i Hesterberg, 2011).

Good (2005) wskazuje pięć kroków w testowaniu permutacyjnym:

1. Określenie hipotezy zerowej (H_0) i hipotezy alternatywnej (H_1);
2. Wybór postaci statystyki testowej (T);
3. Obliczenie statystyki testowej dla danych z próby (T_0);
4. Określenie rozkładu empirycznego statystyki T przy prawdziwej hipotezie H_0 ;
5. Podjęcie decyzji z uwzględnieniem wartości T_0 i rozkładu statystyki T .

Zastosowanie testu permutacyjnego nieodłącznie jest związane z założeniem identyczności rozkładów w dwóch (lub więcej) populacjach (identyczność dystrybuant: $F_1 = F_2$). Zaprzeczenie wskazanemu warunkowi może oznaczać, że populacje różnią się typem rozkładu, wartościami oczekiwanymi lub wariancjami, ewentualnie innymi charakterystykami. To prowadzący badanie decyduje, jakie niezgodności zamierza zidentyfikować, odpowiednio formułuje hipotezy i dobiera postać statystyki testowej.

Formalny zapis hipotez jest taki jak w modelu populacyjnym. Mogą one dotyczyć np. równości wartości oczekiwanych w populacjach ($H_0: \mu_1 = \mu_2$), równości wariancji ($H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$) czy równości współczynników korelacji w dwóch populacjach ($H_0: \rho_1 = \rho_2$). Hipotezy alternatywne – podobnie jak w modelu populacyjnym – mogą być formułowane w różnych wersjach, które dla pierwszej z wymienionych hipotez H_0 przyjęłyby postać: $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$, $H_1: \mu_1 > \mu_2$, $H_1: \mu_1 < \mu_2$. Istotą doboru postaci statystyki testowej jest to, aby w przypadku słuszności hipotezy alternatywnej H_1 statystyka przyjmowała określone wartości (np. duże). W przypadku testowania hipotezy o równości wartości oczekiwanych postać statystyki testowej może np. przyjąć formę

$$T = \bar{X}_1 - \bar{X}_2, \quad (1)$$

gdzie \bar{X}_1 i \bar{X}_2 są średnimi z grup.

Do weryfikacji tej hipotezy można także wykorzystać np. statystykę postaci (Kończak, 2016)

$$T^{(1)} = \bar{X}_1, \quad (2)$$

a jeśli zmienne X_1, X_2 przyjmują wyłącznie wartości dodatnie, to również statystykę

$$T^{(2)} = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2}. \quad (3)$$

Statystyki T , $T^{(1)}$ i $T^{(2)}$ są nazywane statystykami równoważnymi (ang. *permutationally equivalent statistics*; Kończak, 2016; Pesarin i Salmaso, 2010). Statystyki równoważne to statystyki testowe, które choć mogą mieć inną formę, to zawsze prowadzą do dokładnie tych samych wartości ASL w analizie permutacyjnej, a w konsekwencji – do tej samej decyzji.

Model permutacyjny jest bardzo elastyczny i wymaga inicjatywy od badacza przy określeniu postaci statystyki testowej. Przykładowo przy testowaniu hipotezy o równości momentów centralnych trzeciego rzędu $H_0: M_{3,1} = M_{3,2}$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1: M_{3,1} > M_{3,2}$ do weryfikacji hipotezy H_0 może być wykorzystana statystyka postaci

$$T = \hat{M}_{3,1} - \hat{M}_{3,2}, \quad (4)$$

gdzie $\hat{M}_{3,1}$, $\hat{M}_{3,2}$ są momentami centralnymi trzeciego rzędu w dwóch próbach wyznaczonych na podstawie danych permutowanych.

Po obliczeniu wartości statystyki testowej T_0 dla oryginalnych danych wartość ASL testu jest definiowana jako prawdopodobieństwo zaobserwowania co najmniej tak dużej (lub co najwyżej tak małej) wartości, gdy hipoteza zerowa jest prawdziwa (Efron i Tibshirani, 1993). W przypadku prawostronnego obszaru krytycznego wartość ASL można zapisać w następujący sposób:

$$ASL = P_{H_0}\{T \geq T_0\}, \quad (5)$$

gdzie statystyka T ma rozkład P_{H_0} przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 . Im mniejsza wartość ASL, tym silniejsze argumenty przeciwko H_0 .

Rozkład statystyki T , przy założeniu słuszności hipotezy H_0 , można oszacować. Zbiór danych jest permutowany N -krotnie (w praktyce zwykle przyjmuje się $N = 1000$ lub $N = 10\,000$) i dla każdego przypadku obliczana jest wartość statystyki testowej T_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Następnie wartość ASL jest szacowana w następujący sposób:

$$ASL \approx \frac{\text{card}\{T_i: T_i \geq T_0\}}{N}. \quad (6)$$

Podobnie jak we wnioskowaniu na podstawie modelu populacyjnego, jeśli $ASL < \alpha$, to odrzuca się hipotezę H_0 na rzecz hipotezy alternatywnej H_1 .

4.3. Dodatkowe możliwości wnioskowania w modelu permutacyjnym

Bonnini i in. (2014) wskazują, że losowe pobieranie próbek jest rzadko osiągnięte w rzeczywistych zastosowaniach. W związku z tym często bezwarunkowe wnioskowanie związane z testami w modelu populacyjnym nie ma zastosowania. W takich sytuacjach możliwym rozwiązaniem są niekiedy testy permutacyjne (Berry i in., 2018). Jeśli analizowane zbiory nie są próbkami losowymi z populacji (np. mogą to być dane dla wszystkich województw, powiatów), to oczywiście nie dąży się do uogólnienia wyników na całą populację. Jednak w takim przypadku możliwe jest wskazanie nieprzypadkowych różnic między analizowanymi zbiorami.

Niech dane będą dwa zbiory obserwacji (nie próby losowe) $A = \{11, 12, 13\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Naturalne pytania związane z wnioskowaniem statystycznym mogą być następujące:

- a) czy w wartościach przeciętnych (lub medianach) w obu zbiorach występują nieprzypadkowe różnice?;
- b) czy w wariancjach występują nieprzypadkowe różnice?

Uzyskanie odpowiedzi na te pytania nie jest możliwe na podstawie modelu populacyjnego. Zastosowanie testu permutacyjnego przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ prowadzi do wyników:

- a) w wartościach przeciętnych w obu grupach występują nieprzypadkowe różnice;
- b) w badanych grupach nie występują nieprzypadkowe różnice wariancji.

Hipotezy zapisane słownie powyżej mogą być formalnie przedstawione tak jak w modelu populacyjnym:

- a) $H0a: \mu_A = \mu_B$ wobec hipotezy alternatywnej $H1a: \mu_A > \mu_B$;
- b) $H0b: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ wobec hipotezy alternatywnej $H1b: \sigma_B^2 > \sigma_A^2$.

Stosując powyższy zapis, należy pamiętać, że wykorzystywanie testów permutacyjnych jest związane z permutowaniem danych, a więc z założeniem, że rozkłady w badanych zbiorowościach są identyczne (wymienność danych). W przypadku a) stwierdza się odrzucenie hipotezy $H0a$, a w przypadku b) brak podstaw do odrzucenia hipotezy $H0b$. W tym drugim przypadku brak podstaw do odrzucenia hipotezy nie oznacza oczywiście jej słuszności. W obu przypadkach zostaną wykorzystane inne statystyki testowe, a ich postać zależy od decyzji prowadzącego badanie. Mogą to być odpowiednio:

- a) $T = \bar{X}_A - \bar{X}_B$;
- b) $T = \frac{S_B^2}{S_A^2}$.

Podczas gdy w modelu populacyjnym postać statystyki testowej dla ustalonego testu jest jednoznacznie określona, to w modelu permutacyjnym postać statystyki testowej zależy od prowadzącego badanie.

Wnioskowanie w modelu populacyjnym, po sformułowaniu hipotezy, dla określonych danych przebiega obecnie w sposób w pełni zautomatyzowany. Postać statystyki testowej jest określona jednoznacznie, w konsekwencji jej wartość, obszar krytyczny i oczywiście decyzja dotycząca weryfikowanej hipotezy, przy przyjętym poziomie istotności. Wnioskowanie w modelu permutacyjnym daje więcej swobody badaczowi nie tylko w zakresie określenia postaci statystyki testowej. Stosunkowo łatwo można skonstruować testy permutacyjne będące odpowiednikami testów klasycznych, ale możliwe jest też konstruowanie testów dla charakterystyk, dla których nie istnieją klasyczne testy statystyczne. W modelu permutacyjnym nie ma potrzeby określania rozkładu teoretycznego statystyki testowej; jest on przybliżany na podstawie danych pochodzących z symulacji.

Szczególną zaletą testów permutacyjnych jest możliwość ich stosowania do porównywania dwóch lub większej liczby zbiorowości, gdy dysponuje się wszystkimi obserwacjami. Może to być np. wykorzystywane przy porównywaniu rozkładów zmiennych w powiatach dla dwóch województw. W takim przypadku nie ma możliwości przeprowadzenia klasycznego wnioskowania, ponieważ dane są wszystkie obserwacje dla obu województw. Sokołowski (2004) wskazuje, że poza określeniami *populacja*

i próba warto wprowadzić określenie *mechanizm ekonomiczny*. Wielkości zmiennych obserwowane dla powiatów są losowe i uzasadnione jest stawianie pytań dotyczących występowania nieprzypadkowych różnic w obserwowanych rozkładach. Wnioskowanie permutacyjne pozwala udzielić odpowiedzi na tak postawione pytania, a rozważania na ten temat są szerzej omawiane w dalszej części artykułu. Wskazane zalety testów permutacyjnych można podsumować za Berrym i in. (2014) – mogą one stanowić podstawę oceny tradycyjnych metod parametrycznych.

Model populacyjny znalazł zastosowanie zarówno w testowaniu hipotez, jak i w estymacji przedziałowej parametrów populacji. Metody permutacyjne nie przyjęły się w estymacji, z wyjątkiem być może konstrukcji przedziałów ufności dla parametrów populacji (Tritchler, 1984) lub dla funkcji regresji (Anderson, 2001), ale metody bootstrapowe mogą być z powodzeniem wykorzystywane do tego celu; wiąże się to również z symulacjami komputerowymi.

4.4. Ograniczenia wnioskowania permutacyjnego

Wskazane powyżej zalety wnioskowania permutacyjnego nie oznaczają, że testy permutacyjne mogą być stosowane we wszystkich sytuacjach. O zagrożeniach związanych z niewłaściwym stosowaniem testów permutacyjnych pisze np. Aickin (2010). W literaturze jako ograniczenie stosowania testów permutacyjnych wskazuje się najczęściej czasochłonność obliczeniową i konieczność opracowania kodu programu. Christensen i Zabriskie (2022) wskazują na przypadki, gdy test permutacyjny może się charakteryzować małą mocą. W szczególnych sytuacjach moc testu może nawet maleć wraz ze zwiększaniem liczebności próby.

Kluczowym założeniem – i zarazem warunkiem wystarczającym dla możliwości zastosowania testu permutacyjnego – jest wymiennność zmiennych (ang. *exchangeability*; Pesarin i Salmaso, 2010). Ciągi zmiennych losowych niezależnych i o takich samych rozkładach (ang. *independent and identically distributed* – IID) są zawsze wymienne, podobnie jak próbkowanie bezzwrotne z populacji skończonej. Jednak podczas gdy własność IID implikuje wymiennność, to wymiennność nie implikuje IID (Berry i in., 2014). Formalnie wymiennność zmiennych oznacza, że ich rozkład łączny nie zmienia się po dowolnej permutacji indeksów. Dla zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n można to zapisać następująco:

$$P\left[\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x_i)\right] = P\left[\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x_{c_i})\right], \quad (7)$$

gdzie x_1, x_2, \dots, x_n są obserwowanymi wartościami, a $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ jest dowolną spośród $n!$ jednakowo prawdopodobnych permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Ten warunek oznacza, że rozkład danych jest niezmienny pod permutacjami indeksów, co jest zazwyczaj spełnione, gdy dane pochodzą z tej samej populacji lub przydział do grup jest

losowy. W literaturze wskazuje się, że w praktyce weryfikacja wymiennosci jest trudna i często poprzestaje się na jej założeniu lub stosuje się modyfikacje testów permutacyjnych w celu osiągnięcia asymptotycznej odporności na jej naruszenia (Anderson, 2001).

4.5. Porównanie modeli populacyjnego i permutacyjnego

Podstawowe właściwości wnioskowania w modelu populacyjnym i modelu permutacyjnym przedstawiono w zestawieniu 1. Łatwo zauważyć różnice między tymi dwoma modelami wnioskowania statystycznego.

Zestawienie 1. Podstawowe właściwości modeli populacyjnego i permutacyjnego

Zagadnienie	Model wnioskowania statystycznego	
	Neymana-Pearsona	Fishera-Pitmana
Specyfikacja populacji	konieczna	możliwa
Losowość próby	konieczna	możliwa
Założenia dotyczące zmiennych	często konieczne	możliwe
Małe próby	ograniczone możliwości	efektywne
Postać statystyki testowej	określona	decyzja badacza
Wartości odstające	brak odporności	odporne
Wyniki wnioskowania	zależne od założeń	zależne wyłącznie od danych
Praktyczne wykorzystanie	często	rzadko
Oprogramowanie	standardowe, dostępne	konieczność kodowania
Wymagania obliczeniowe	niewielkie	większe

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Berry i in. (2014, 2021).

Jeśli spełnione są założenia dotyczące modelu populacyjnego lub pobrano próby o znacznych liczebnościach, to zalecane jest korzystanie z testów klasycznych. W przypadku gdy założenia stosowania metod klasycznych nie są spełnione, próby są nieliczne, występują wartości odstające lub próby nie są losowe, warto odwołać się do modelu permutacyjnego. Ważną zaletą wnioskowania na podstawie modelu permutacyjnego jest jego intuicyjność i związana z tym wysoka wartość dydaktyczna. Stosowanie wnioskowania permutacyjnego może przyczynić się do lepszego odbioru prezentowanych wyników badań statystycznych.

4.6. Oprogramowanie

Pewnym ograniczeniem stosowalności modelu permutacyjnego jest konieczność opracowania kodu. O ile w modelu klasycznym postać statystyki testowej jest dla danego testu jednoznacznie określona, a obliczenia można wykonać w różnych programach statystycznych i biurowych, o tyle w modelu permutacyjnym o postaci statystyki testowej decyduje prowadzący badanie. Przy określaniu postaci statystyki należy wziąć

pod uwagę, jakie różnice powinny być wykazane przez test. Dla efektywnego stosowania wnioskowania permutacyjnego niezbędne jest posługiwanie się odpowiednimi programami. W zestawieniu 2 przedstawiono wybrane pakiety programu R pozwalające na sprawne przeprowadzenie wielu testów permutacyjnych.

Zestawienie 2. Wybrane pakiety programu R wspomagające wnioskowanie w modelu permutacyjnym

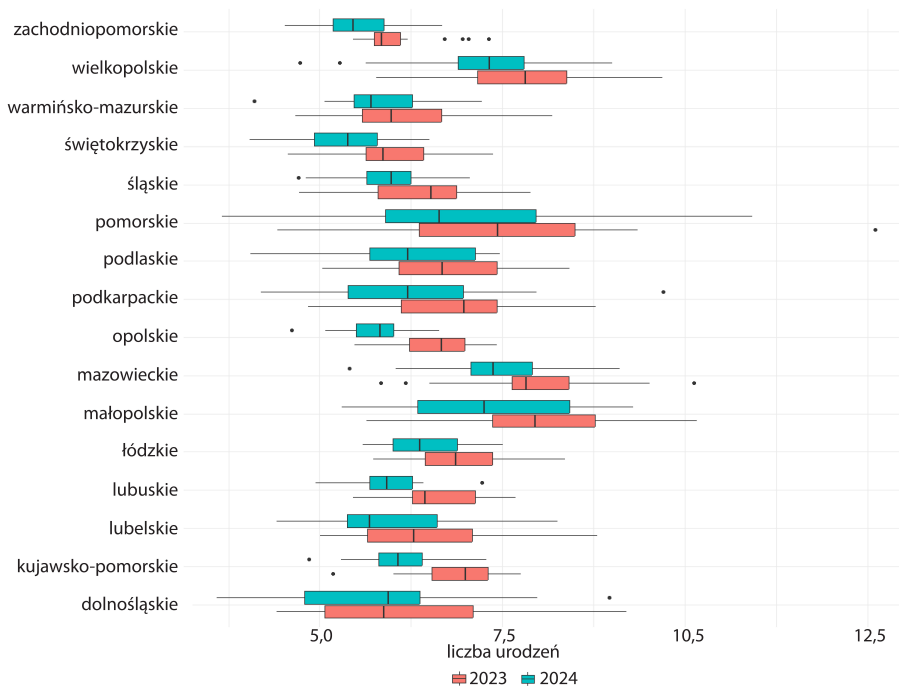
Pakiety	Opis
<code>coin</code>	szeroki zakres testów permutacyjnych
<code>wPerm</code>	ważone testy permutacyjne
<code>perm</code>	dokładne i asymptotyczne testy permutacyjne
<code>permutest</code>	generowanie permutacji i przeprowadzanie testów permutacyjnych
<code>flip</code>	wielowymiarowe testy permutacyjne
<code>exactRankTests</code>	permutacyjne testy rangowe
<code>lmPerm</code>	testy permutacyjne w modelach regresji
<code>permuco</code>	testy permutacyjne dla regresji i ANOVA
<code>libcoin</code>	biblioteka pomocnicza dla pakietu <code>coin</code>
<code>permutest</code>	testy permutacyjne dla porównań dwóch grup

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Berry i in. (2021) i CRAN R-project (b.r.).

5. Przykład wnioskowania w modelu permutacyjnym

Zastosowanie modelu permutacyjnego pozwala udzielić odpowiedzi na pytania o istotność różnic w przypadku, gdy nie ma możliwości zastosowania modelu populacyjnego. Dotyczy to np. sytuacji, gdy dane są obserwacje (wartości zmiennych losowych) dla wszystkich jednostek. Dla przykładu dokonano analizy liczby urodzeń żywych na 1000 ludności, w której zostały wykorzystane dane z Banku Danych Lokalnych (BDL) Głównego Urzędu Statystycznego (<https://bdl.stat.gov.pl>). Dane z tej bazy obejmują wszystkie jednostki, np. województwa, powiaty i gminy. W poniższych rozważaniach przeprowadzono wnioskowanie w modelu permutacyjnym dla wszystkich powiatów według województw za lata 2023 i 2024. Zastosowanie modelu permutacyjnego pozwala wskazać, czy zmiany współczynnika urodzeń żywych są na tyle duże, że nie można ich traktować jako przypadkowe. Ma to fundamentalne znaczenie, ponieważ analiza trendów demograficznych na poziomie lokalnym jest kluczowym elementem demografii społecznej – subdyscypliny ekonomii, ważnej dla projektowania polityki publicznej.

Rozkład liczby urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach według województw w latach 2023 i 2024 zilustrowano na wykr. 1 (opiera się on na wizualizacji typu „pu-dełko z wąsami”; Kończak, 2024). Można zauważyć, że we wszystkich województwach (z wyjątkiem dolnośląskiego, gdzie zaobserwowano niewielki wzrost) mediana liczby urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach się zmniejszyła.

Wykr. 1. Liczba urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach według województw w latach 2023 i 2024

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z BDL.

Porównano powiaty w dwóch województwach i w tym samym województwie w dwóch różnych latach. Przy użyciu testów permutacyjnych zestawiono mediany rozkładów:

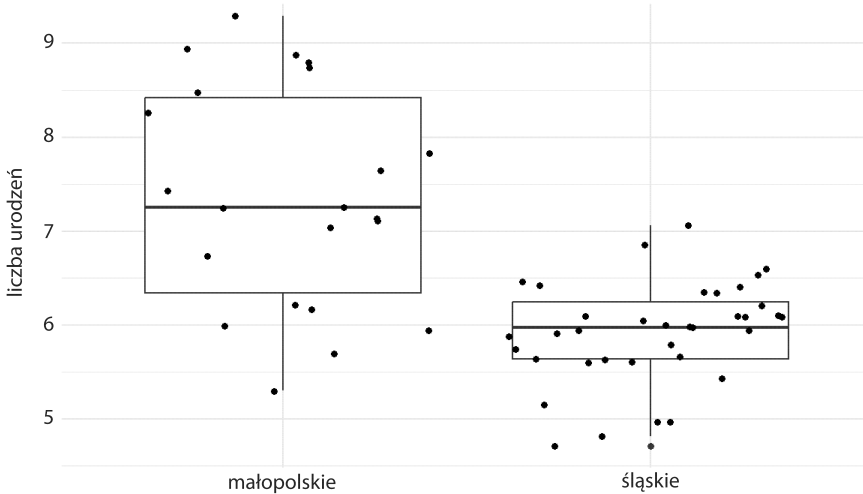
- współczynnika urodzeń żywych w powiatach województw małopolskiego i śląskiego w 2024 r.;
- współczynnika urodzeń żywych w powiatach według województw w latach 2023 i 2024.

W obu analizowanych przypadkach statystyka testowa to różnica median, a weryfikowane są następujące hipotezy:

- H_0 : oczekiwane mediany w powiatach obu zbiorowości (dwa województwa lub dwa okresy czasu) są jednakowe;
- H_1 : oczekiwane mediany w obu zbiorowościach są różne.

Na wyk. 2 przedstawiono liczbę urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach województw małopolskiego i śląskiego w 2024 r. Ten wykres wskazuje na dość znaczne różnice w medianach, jednak sama ilustracja nie pozwala na stwierdzenie występowania nieprzypadkowych różnic median dla powiatów w tych województwach. Niezbędne jest przeprowadzenie testu permutacyjnego dla równości median w dwóch populacjach dla zmiennych niezależnych; model populacyjny nie daje możliwości weryfikacji takiej hipotezy.

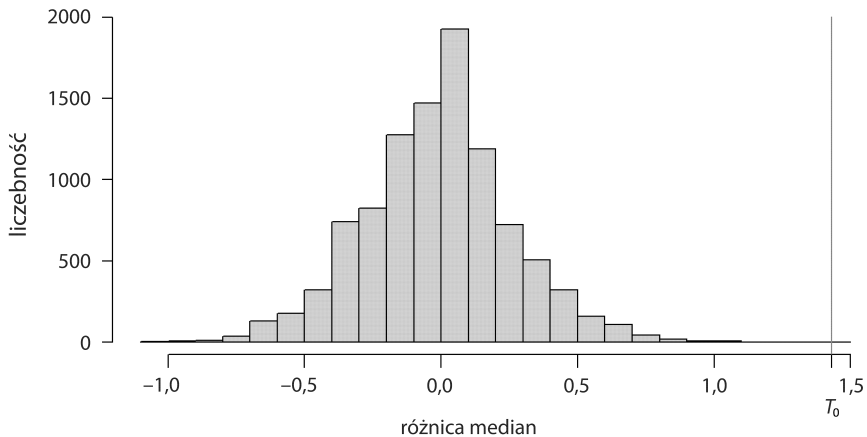
Wykr. 2. Liczba urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach województw małopolskiego i śląskiego w 2024 r.



Uwaga. Każda kropka na wykresie reprezentuje jeden powiat.
 Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z BDL.

Funkcja `perm.ind.loc` z pakietu `wPerm` (<https://github.com/cran/wPerm/tree/master>) wskazuje na wartość statystyki testowej $T_0 = 1,275$ i $ASL = 0,0001$. Pozwala to na stwierdzenie, że pomiędzy medianami liczby urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach województw małopolskiego i śląskiego występują nieprzypadkowe różnice. Empiryczny rozkład statystyki testowej i zaobserwowana wartość statystyki dla danych oryginalnych zostały przedstawione na wykry. 3.

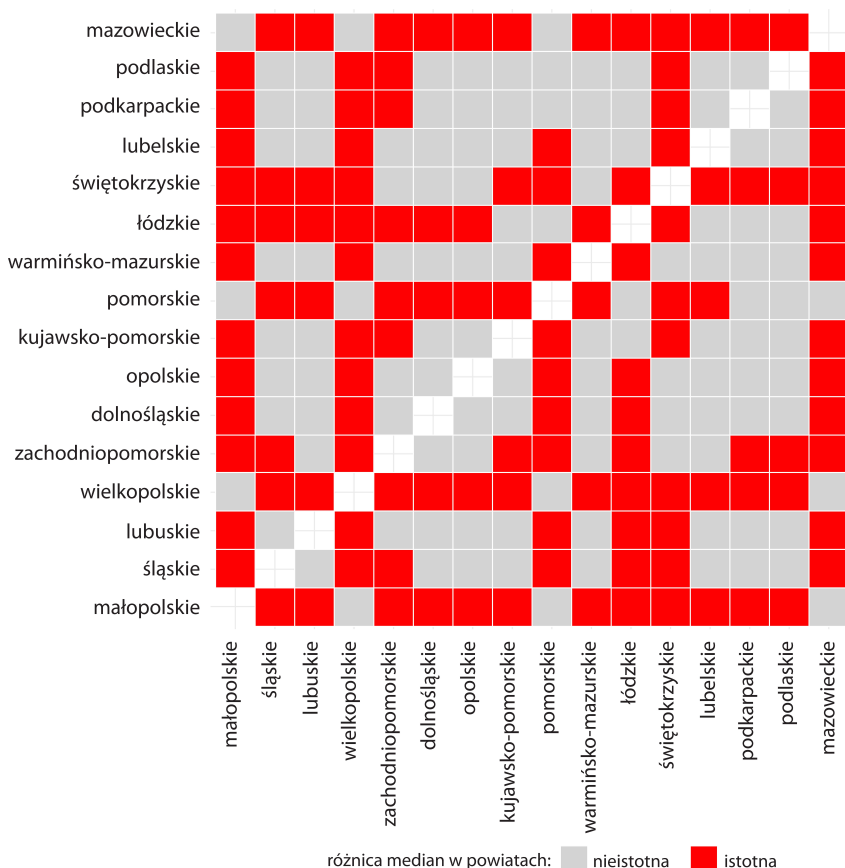
Wykr. 3. Rozkład empiryczny statystyki testowej T i obserwowana wartość statystyki T_0



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem `wPerm`.

Na wyk. 4 przedstawiono wynik takich porównań dla wszystkich województw parami. Kolorem czerwonym wyróżniono statystycznie istotne różnice median w powiatach wskazanych województw. Charakterystyczne jest to, że pod względem liczby urodzeń żywych na 1000 ludności mediany w województwach małopolskim, mazowieckim i wielkopolskim nie różnią się istotnie. Jednocześnie występują statystycznie istotne różnice tego współczynnika pomiędzy tymi województwami a wszystkimi pozostałymi, z wyjątkiem pomorskiego. Wskazane różnice i podobieństwa median liczby urodzeń żywych w powiatach w 2024 r. są dobrze widoczne także na wyk. 1.

Wykr. 4. Istotność różnic ($\alpha = 0,05$) median w powiatach według województw w 2024 r.



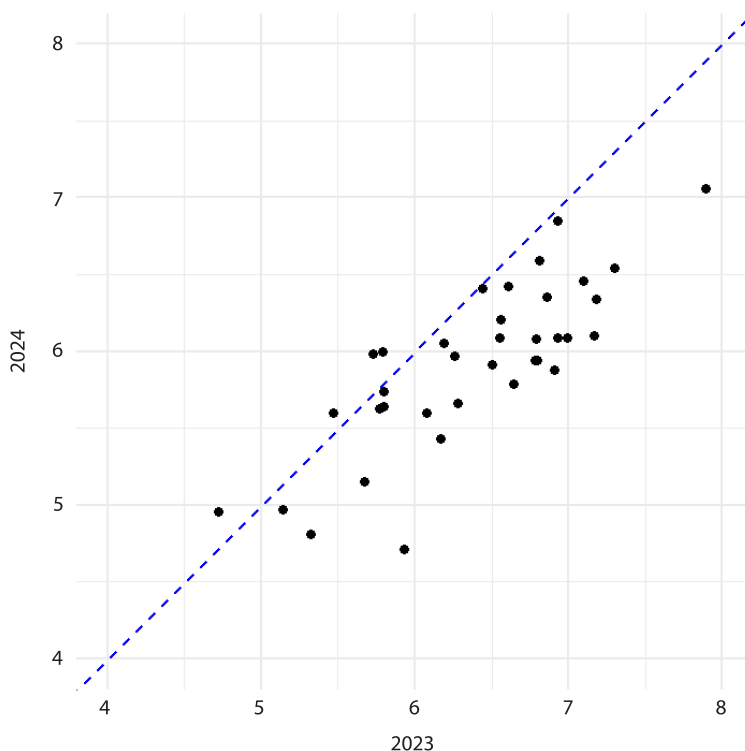
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z BDL.

Do porównania median liczby urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach woj. śląskiego w latach 2023–2024 niezbędne jest skorzystanie z testu dla danych skojarzonych. Na wyk. 5 przedstawiono liczbę urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach

woj. śląskiego w latach 2023 i 2024. Można zauważyć, że w 2024 r. tylko w czterech spośród 36 powiatów (punkty nad przekątną) liczba urodzeń żywych na 1000 ludności wzrosła w porównaniu z 2023 r. (powiat rybnicki oraz miasta na prawach powiatu: Jaworzno, Tychy i Dąbrowa Górnicza).

Funkcja `perm.paired.loc` z pakietu `wPerm` wskazuje na wartość statystyki testowej $T_0 = 0,467$ i $ASL = 0,0001$. Pozwala to na stwierdzenie, że pomiędzy medianami liczby urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach woj. śląskiego w latach 2023 i 2024 występują nieprzypadkowe różnice.

Wykr. 5. Liczba urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach woj. śląskiego w latach 2023 i 2024



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z BDL.

Wyniki testu permutacyjnego równości median w powiatach między 2023 r. a 2024 r. dla poszczególnych województw przedstawiono w tabl. 2. Obliczenia wykazały silnie istotne różnice ($ASL < 0,01$) w województwach: kujawsko-pomorskim, lubuskim, mazowieckim, opolskim, śląskim i wielkopolskim, co sugeruje znaczne zmiany w rozkładzie liczby urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach. Natomiast

w województwach dolnośląskim i warmińsko-mazurskim nie stwierdzono istotnych statystycznie różnic ($\alpha = 0,05$), co może świadczyć o stabilności mediany lub niewielkich zmianach w powiatach tych województw.

Tabl. 2. ASL dla testu permutacyjnego równości median w powiatach według województw w latach 2023 i 2024

Województwa	ASL	Województwa	ASL
Dolnośląskie	0,6510	Podkarpackie	0,0023
Kujawsko-pomorskie	0,0001	Podlaskie	0,0145
Lubelskie	0,0037	Pomorskie	0,0033
Lubuskie	0,0001	Śląskie	0,0001
Łódzkie	0,0027	Świętokrzyskie	0,0021
Małopolskie	0,0027	Warmińsko-mazurskie	0,1870
Mazowieckie	0,0001	Wielkopolskie	0,0001
Opolskie	0,0001	Zachodniopomorskie	0,0070

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem `wPerm`.

6. Podsumowanie

Metody wnioskowania statystycznego wykorzystywane są przez naukowców reprezentujących różne dyscypliny naukowe. W testowaniu hipotez statystycznych najczęściej stosuje się model Neymana-Pearsona. Podstawy wnioskowania według tego modelu są wykładane na kursach statystyki na całym świecie. Alternatywnym modelem wnioskowania statystycznego jest model Fishera-Pitmana. Ten model pozwala na testowanie hipotez bezpośrednio na danych bez założeń o rozkładzie, traktując obserwowane dane jako całą populację i badając, czy różnice mogą być dziełem przypadku.

Model permutacyjny jest bardzo rzadko wykorzystywany w praktyce, szczególnie w naukach ekonomicznych. W artykule wskazano kluczowe zalety tego modelu w porównaniu z modelem populacyjnym. Model permutacyjny może być stosowany bez wielu typowych założeń związanych z modelem populacyjnym. Testy permutacyjne są wolne od ostrych wymagań dotyczących postaci rozkładu, całkowicie zależne od danych, odpowiednio dla prób nielosowych i idealne dla małych zbiorów danych. Model permutacyjny może być w szczególności stosowany w badaniach ekonomicznych, gdzie często nie jest możliwe przyjęcie założenia o normalnym rozkładzie badanych zmiennych. Pozwala na przeprowadzenie wnioskowania nawet w przypadku prób nielosowych, choć wówczas nie można uogólniać wyników wnioskowania na populację, a jedynie możliwe jest potwierdzenie występowania nieprzypadkowych różnic w badanych grupach.

W przedstawionej analizie wykorzystano dane dotyczące liczby urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach według województw w latach 2023 i 2024. Zastosowanie wnioskowania permutacyjnego pozwoliło na sformułowanie konkluzji o istotnych statystycznie różnicach w rozkładach badanego współczynnika. Wskazano istotne zmiany w liczbie urodzeń żywych na 1000 ludności w powiatach niemal wszystkich województw w 2024 r. w stosunku do 2023 r. Dzięki zastosowaniu modelu permutacyjnego można było przeprowadzić wnioskowanie, pomimo że nie dysponowano próbkami losowymi z określonej populacji. Przeprowadzone analizy potwierdziły zalety teoretyczne i skuteczność wnioskowania statystycznego w modelu permutacyjnym nawet wówczas, gdy oparte jest ono na próbach nielosowych, co nie daje możliwości przeprowadzenia wnioskowania na podstawie modelu populacyjnego.

Model permutacyjny może znaleźć zastosowanie w analizie danych z pełnych (niepróbkowych) zbiorów, w której tradycyjne testy parametryczne są nieadekwatne. Może być wykorzystywany do potwierdzania statystycznej istotności różnic, np. wskaźnika bezrobocia we wszystkich powiatach dwóch różnych województw, do analizy stopy migracji netto w gminach w wybranych województwach, oceny zmian zagrożenia ubóstwem w powiatach lub badania różnic w dostępności usług publicznych (edukacja, ochrona zdrowia) między jednostkami terytorialnymi.

Bibliografia

- Aickin, M. (2010). Invalid Permutation Tests. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, (1), 1–10. <https://doi.org/10.1155/2010/769780>.
- Alcozer, G. (2016). *Descriptive Statistics and the Least Square Method*. Lambert Academic Publishing.
- Anderson, M. J. (2001). Permutation tests for univariate or multivariate analysis of variance and regression. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 58(3), 626–639. <https://doi.org/10.1139/f01-004>.
- Antoch, J., Hušková, M. (2001). Permutation tests in change point analysis. *Statistics & Probability Letters*, 53(1), 37–46. [https://doi.org/10.1016/S0167-7152\(01\)00009-8](https://doi.org/10.1016/S0167-7152(01)00009-8).
- Arboretti, R., Bonnini, S., Corain, L., Salmaso, L. (2014). A permutation approach for ranking of multivariate populations. *Journal of Multivariate Analysis*, 132, 39–57. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2014.07.009>.
- Bednarski, T. (2013). Rola Jerzego Spławy-Neymana w kształtowaniu metod statystycznej analizy przyczynowości. *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, (309), 11–18.
- Berry, K. J., Johnston, J. E., Mielke, P. W. Jr. (2014). *A Chronicle of Permutation Statistical Methods. 1920–2000, and Beyond*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-02744-9>.
- Berry, K. J., Johnston, J. E., Mielke, P. W. Jr. (2018). *The Measurement of Association. A Permutation Statistical Approach*. Springer Nature Switzerland. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-98926-6>.

- Berry, K. J., Johnston, J. E., Mielke, P. W. Jr. (2019). *A Primer of Permutation Statistical Methods*. Springer Nature Switzerland. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-20933-9>.
- Berry, K. J., Kvamme, K. L., Johnston, J. E., Mielke, P. W. Jr. (2021). *Permutation Statistical Methods with R*. Springer Nature Switzerland. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-74361-1>.
- Berry, K. J., Mielke, P. W. Jr., Johnston, J. E. (2016). *Permutation Statistical Methods. An Integrated Approach*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28770-6>.
- Bonnini, S., Assegie, G. M. (2022). Advances on Permutation Multivariate Analysis of Variance for big data. *Statistics in Transition new series*, 23(2), 163–183. <https://doi.org/10.2478/stattrans-2022-0022>.
- Bonnini, S., Assegie, G. M., Trzcinska, K. (2024). Review about the Permutation Approach in Hypothesis Testing. *Mathematics*, 12(17), 1–29. <https://doi.org/10.3390/math12172617>.
- Bonnini, S., Corain, L., Marozzi, M., Salmaso, L. (2014). *Nonparametric Hypothesis Testing. Rank and Permutation Methods with Applications in R*. John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/9781118763490>.
- Brombin, C., Salmaso, L. (2013). *Permutation Tests in Shape Analysis*. Springer Science + Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8163-8>.
- Chihara, L., Hesterberg, T. (2011). *Mathematical Statistics with Resampling and R*. John Wiley & Sons. <https://download.e-bookshelf.de/download/0000/8064/48/L-G-0000806448-0004427684.pdf>.
- Christensen, W. F., Zabriskie, B. N. (2022). When Your Permutation Test is Doomed to Fail. *The American Statistician*, 76(1), 53–63. <https://doi.org/10.1080/00031305.2021.1902856>.
- Corain, L., Arboretti, R., Bonnini, S. (2016). *Ranking of Multivariate Populations. A Permutation Approach with Applications*. Taylor & Francis Group. <https://doi.org/10.1201/b19673>.
- Corder, G. W., Foreman, D. I. (2014). *Nonparametric Statistics. A Step-by-Step Approach* (wyd. 2). John Wiley & Sons. https://faculty.ksu.edu.sa/sites/default/files/nonparametric_statistics_a_step-by-step_approach.pdf.
- CRAN R-project. (b.r.). *CRAN Packages*. https://cran.r-project.org/web/packages/available_packages_by_name.html.
- Davison, A. C., Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap Methods and their Application*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511802843>.
- Domański, C., Pekasiewicz, D., Baszczyńska, A., Witaszczyk, A. (2014). *Testy statystyczne w procesie podejmowania decyzji*. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.
- Dufour, J.-M., Flachaire, E., Khalaf, L. (2019). Permutation Tests for Comparing Inequality Measures. *Journal of Business & Economic Statistics*, 37(3), 457–470. <https://doi.org/10.1080/07350015.2017.1371027>.
- Eden, T., Yates, F. (1933). On the Validity of Fisher's z Test When Applied to an Actual Example of Non-Normal Data. *The Journal of Agricultural Science*, 23(1), 6–17. <https://doi.org/10.1017/S0021859600052862>.
- Edgington, E. S. (2006). Randomization tests. W: S. Kotz, B. R. Campbell, N. Balakrishnan, B. Vidakovic, N. L. Johnson (red.), *Encyclopedia of Statistical Sciences* (wyd. 2; s. 6845–6852). Wiley.
- Edgington, E., Onghena, P. (2007). *Randomization Tests*. Chapman & Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781420011814>.
- Efron, B. (1982). *The Jackknife, the Bootstrap, and Other Resampling Plans*. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970319>.

- Efron, B., Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall/CRC.
<https://doi.org/10.1201/9780429246593>.
- Ernst, M. D. (2004). Permutation Methods: A Basis for Exact Inference. *Statistical Science*, 19(4), 676–685. <https://doi.org/10.1214/088342304000000396>.
- Fisher, R. A. (1925). *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver and Boyd.
- Geary, R. C. (1927). Some Properties of Correlation and Regression in a Limited Universe. *Metron Rivista Internazionale de Statistica*, 7, 83–119.
- Geary, R. C. (1947). Testing for Normality. *Biometrika*, 34(3–4), 209–242.
<https://doi.org/10.1093/biomet/34.3-4.209>.
- Geisser, S. (2006). *Models of Parametric Statistical Inference*. John Wiley & Sons.
- Gibbons, J. D. (2006). Permutation tests. W: S. Kotz, B. R. Campbell, N. Balakrishnan, B. Vidakovic, N. L. Johnson (red.), *Encyclopedia of Statistical Sciences* (t. 9, s. 6077). Wiley.
<https://doi.org/10.1002/0471667196.ess1954.pub2>.
- Gibbons, J. D., Chakraborti, S. (2011). *Nonparametric Statistical Inference* (wyd. 5). Chapman & Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781439896129>.
- Good, P. I. (2005). *Permutation, Parametric and Bootstrap Tests of Hypotheses* (wyd. 3). Springer Science Business Media. <https://doi.org/10.1007/b138696>.
- Good, P. I. (2006). *Resampling Methods. A Practical Guide to Data Analysis* (wyd. 3). Birkhauser.
<https://doi.org/10.1007/0-8176-4444-X>.
- Greń, J. (1974). *Statystyka matematyczna. Modele i zadania* (wyd. 4). Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- Hald, A. (2007). *A History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713–1935*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-46409-1>.
- Kerns, G. J. (2010). *Introduction to Probability and Statistics Using R*.
<https://cran.r-project.org/web/packages/IPSUR/vignettes/IPSUR.pdf>.
- Konietschke, F., Pauly, M. (2012). A studentized permutation test for the nonparametric Behrens-Fisher problem in paired data. *Electronic Journal of Statistics*, 6, 1358–1372.
<https://doi.org/10.1214/12-EJS714>.
- Kończak, G. (2016). *Testy permutacyjne. Teoria i zastosowania*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach.
- Kończak, G. (2020). *Nieklasyczne metody statystyczne w badaniach ekonomicznych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach.
- Kończak, G. (2024). *Wizualizacja wyników badań naukowych. Zasady, metody i narzędzia*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach.
<https://doi.org/10.22367/uekat.9788378759010>.
- Kończak, G., Kosińska, M. (2025). Use of permutation methods in testing the independence of variables in multidimensional contingency tables. *Wiadomości Statystyczne. The Polish Statistician*, 70(5), 1–15. <https://doi.org/10.59139/ws.2025.05.1>.
- Kończak, G., Stapor, K. (2023). Changepoint detection with the use of the RESPERM method – a Monte Carlo study. *Statistics in Transition new series*, 24(5), 167–184.
<https://doi.org/10.59170/stattrans-2023-069>.
- Ledwina, T. (2012). Neyman Jerzy (1894–1981). W: *Statystycy polscy* (s. 245–254). Główny Urząd Statystyczny. https://pts.stat.gov.pl/media/statystycypolscy_ksiazka.pdf.

- Lehmann, E. L. (2009). Parametric versus nonparametric: Two Alternative Methodologies. *Journal of Nonparametric Statistics*, 21(4), 397–405. <https://doi.org/10.1080/10485250902842727>.
- Lehmann, E. L. (2011). *Fisher, Neyman, and the Creation of Classical Statistics*. Springer Science + Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9500-1>.
- Lehmann, E. L., Romano, J. P. (2005). *Testing Statistical Hypothesis* (wyd. 3). Springer Science + Business Media. <http://ndl.ethernet.edu.et/bitstream/123456789/39079/1/E.%20L.%20Lehmann.pdf>.
- Manly, B. F. J. (1997). *Randomization, bootstrap, and Monte Carlo methods in biology*. Chapman & Hall.
- Mielke, P. W. Jr., Berry, K. J. (1994). Permutation Tests for Common Locations Among Samples With Unequal Variances. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 19(3), 217–236. <https://doi.org/10.3102/10769986019003217>.
- Mielke, P. W. Jr., Berry, K. J. (2007). *Permutation Methods. A Distance Function Approach* (wyd. 2). Springer Science + Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69813-7>.
- Neyman, J., Pearson, E. S. (1928a). On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference: Part I. *Biometrika*, 20A(1–2), 175–240. <https://doi.org/10.1093/biomet/20A.1-2.175>.
- Neyman, J., Pearson, E. S. (1928b). On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference: Part II. *Biometrika*, 20A(3–4), 263–294. <https://doi.org/10.1093/biomet/20A.3-4.263>.
- Neyman, J., Pearson, E. S. (1933). On the Problems of the most Efficient Tests of Statistical Hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 231(694–706), 289–337. <https://doi.org/10.1098/rsta.1933.0009>.
- Ongghena, P. (2018). Randomization Tests or Permutation Tests? A Historical and Terminological Clarification. W: V. W. Berger (red.), *Randomization, Masking, and Allocation Concealment* (s. 209–228). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315305110-14>.
- Ostasiewicz, K. (2014). *Mathematical Statistics*. Publishing House of Wrocław University of Economics.
- Pauly, M., Brunner, E., Konietzschke, F. (2005). Asymptotic permutation tests in general factorial design. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*, 77(2), 461–473. <https://doi.org/10.1111/rssb.12073>.
- Pesarin, F., Salmaso, L. (2010). *Permutation Tests for Complex Data. Theory, Applications and Software*. John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/9780470689516>.
- Phipson, B., Smyth, G. K. (2011). Permutation p-values should never be zero: Calculating exact p-values when permutations are randomly drawn. *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, 9(1). <https://doi.org/10.2202/1544-6115.1585>.
- Pitman, E. J. G. (1937a). Significance Tests which may be Applied to Samples from any Populations. *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, 4(1), 119–130. <https://doi.org/10.2307/2984124>.
- Pitman, E. J. G. (1937b). Significance Tests which may be Applied to Samples from any Populations. II. The Correlation Coefficient Test. *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, 4(2), 225–232. <https://doi.org/10.2307/2983647>.

- Pitman, E. J. G. (1938). Significance Tests which may be Applied to Samples from any Populations: III. The analysis of variance test. *Biometrika*, 29(3–4), 322–335. <https://doi.org/10.2307/2332008>.
- Sheskin, D. J. (2004). *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures* (wyd. 3). Chapman & Hall/CRC.
- Sobczyk, M. (2010). *Statystyka opisowa*. C. H. Beck.
- Sokołowski, A. (2004). O niewłaściwym stosowaniu metod statystycznych. W: *Statystyka i Data Mining w badaniach naukowych* (s. 5–14). Statsoft Polska. https://media.statsoft.pl/_old_dnn/downloads/naukowe1.pdf.
- Sommer, W., Stąpor, K., Kończak, G., Kotowski, K., Fabian, P., Ochab, J., Beres, A., Ślusarczyk, G. (2022). Changepoint Detection in Noisy Data Using a Novel Residuals Permutation-Based Method (RESPERM). Benchmarking and Application to Single Trial ERPs. *Brain Sciences*, 12(5), 1–14. <https://doi.org/10.3390/brainsci12050525>.
- Spława-Neyman, J. (1923). Próba uzasadnienia zastosowań rachunku prawdopodobieństwa do doświadczeń polowych. *Rocznik Nauk Rolniczych i Leśnych*, 10, 1–51.
- Spława-Neyman, J. (1923/1990). On the Application of Probability Theory to Agricultural Experiments. Essay on Principles. Section 9 (tłum. D. M. Dąbrowska, T. P. Speed). *Statistical Science*, 5(4), 465–480.
- Stąpor, K., Kończak, G., Grabowski, D., Żywiołek-Szeja, M., Chudzicka-Czupała, A. (2025). MCorrSeqPerm: Searching for the Maximum Statistically Significant System of Linear Correlations and its Application in Work Psychology. *Applied Psychological Measurement*, 50(1–2). <https://doi.org/10.1177/01466216251360562>.
- Todman, J. B., Dugard, P. (2009). *Single-case and Small-n Experimental Designs. A Practical Guide to Randomization Tests*. Taylor & Francis.
- Tritchler, D. (1984). On Inverting Permutation Tests. *Journal of the American Statistical Association*, 79(385), 200–207. <https://doi.org/10.1080/01621459.1984.10477085>.
- Wasserman, L. (2006). *All of Nonparametric Statistics*. Springer Science + Business Media. <https://doi.org/10.1007/0-387-30623-4>.

Differences in the ways of spending leisure time by Generation Z tertiary students before and after the COVID-19 pandemic

Różnice w sposobach spędzania czasu wolnego przez studentów z pokolenia Z przed pandemią COVID-19 i po jej zakończeniu

Grażyna Węgrzyn,^a Danuta Miłaszewicz,^b Marcin Salamaga^c

Abstract. Changes in the way young people spend their leisure time are an important indicator of social and economic transformations as well as of the influence of external factors on everyday life. The aim of the study discussed in the article is to identify changes which took place in the time budget and structure of leisure activities of Generation Z tertiary students in Poland after the COVID-19 pandemic compared to the pre-pandemic period, paying particular attention to gender differences and the role of paid work. The analysis was performed on the basis of three waves of a questionnaire survey conducted in 2018, 2020 and 2023. The analysis of variance, chi-square tests and Student's *t*-tests were applied to assess the significance of the observed changes. The study indicates that a substantial reorganisation of time budget took place between 2018 and 2023: the importance of studying declined, while the role of paid work and digital entertainment increased. Gender differences persisted throughout the studied period: women devoted

^a Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Ekonomii i Finansów, Katedra Ekonomii i Polityki Ekonomicznej, Polska / Wrocław University of Economics and Business, Faculty of Economics and Finance, Department of Economics and Economic Policy, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4735-2807>. Autor korespondencyjny / Corresponding author, e-mail: grazyna.wegrzyn@ue.wroc.pl.

^b Uniwersytet Szczeciński, Wydział Ekonomii, Finansów i Zarządzania, Instytut Ekonomii i Finansów, Katedra Ekonomii, Polska / University of Szczecin, Faculty of Economics, Finance and Management, Institute of Economics and Finance, Department of Economics, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6429-7331>. E-mail: danuta.milaszewicz@usz.edu.pl.

^c Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Kolegium Ekonomii i Finansów, Instytut Metod Ilościowych w Naukach Społecznych, Katedra Statystyki, Polska / Krakow University of Economics, College of Economics and Finance, Institute of Quantitative Methods in Social Sciences, Department of Statistics, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0225-6651>. E-mail: salamaga@uek.krakow.pl.

more time to studying and household duties, while men were more involved in sports and digital activities. The findings highlight the usefulness of classical statistical methods in analysing social change, and provide important guidelines for the educational policy.

Keywords: leisure time, Generation Z, COVID-19 pandemic, statistical methods, gender differences

Streszczenie. Zmiany w sposobie spędzania czasu wolnego przez młodych ludzi są ważnym wskaźnikiem przemian społecznych i gospodarczych, a także wpływu czynników zewnętrznych na życie codzienne. Celem badania omawianego w artykule jest zidentyfikowanie zmian, jakie zaszły w budżecie czasu oraz strukturze aktywności wolnoczasowych studentów z pokolenia Z w Polsce po zakończeniu pandemii COVID-19 w porównaniu z okresem przed jej wybuchem, ze szczególnym uwzględnieniem różnicy płci oraz roli pracy zarobkowej. Analizowano wyniki trzech fal badania ankietowego: z 2018 r., 2020 r. i 2023 r. Do oceny istotności zaobserwowanych zmian zastosowano analizę wariancji, testy chi-kwadrat oraz testy *t*-Studenta. Z badania wynika, że w okresie 2018–2023 nastąpiła znacząca reorganizacja budżetu czasu: zmalało znaczenie nauki, a wzrosła rola pracy zarobkowej i rozrywki cyfrowej. W całym analizowanym okresie obserwowano utrzymywanie się różnic między płciami: kobiety przeznaczały więcej czasu na naukę i obowiązki domowe, natomiast mężczyźni w większym wymiarze czasu angażowali się w sport oraz aktywności cyfrowe. Wyniki podkreślają przydatność klasycznych metod statystycznych w analizie zmian społecznych oraz dostarczają istotnych wskazówek dla polityki edukacyjnej.

Słowa kluczowe: czas wolny, pokolenie Z, pandemia COVID-19, metody statystyczne, różnice między płciami

JEL: C12, I21, J16

1. Introduction

Leisure time is a vital element of human activity, combining individual choices with broader social and economic conditions. It is most often defined as the portion of the day that remains after fulfilling professional, educational, household and physiological obligations (Bombol, 2008; Tarczoń, 2017). In contemporary research, it is understood not merely as 'free time', but as a period of voluntary activity that helps to relax, gives satisfaction and lends opportunities for personal growth (Demirbaş, 2020; Munusturlar & Argan, 2016). Leisure also serves wider purposes, enhancing wellbeing, social integration and cultural participation (Kuykendall et al., 2018; Mansfield et al., 2020).

The study of leisure has long been interdisciplinary, involving economics, sociology, psychology and pedagogy. Definitions (Davidovitch & Soen, 2016; Iso-Ahola & Baumeister, 2023) focus either on quantitative aspects (time left after work and study) or qualitative ones (activities associated with intrinsic motivation and enjoyment). Leisure thus reflects both individual preferences and structural factors that shape opportunities for free time (Pourahmad et al., 2015; Zajadacz, 2021).

Leisure activities are determined by demographic and social characteristics such as gender, age and socio-economic status (Cha, 2024; Üstün et al., 2021). Generational differences are especially important. Generation Z, as the first digital-native group, have distinctive leisure patterns shaped by technology, social media and global connectivity (Dimock, 2019; Freeman, 2022). Research indicates that digital leisure, including streaming, online gaming and social networking has become the dominant leisure activities of young people (Lamberti et al., 2023; Sintas et al., 2015). At the same time, differences between genders resurface as far as leisure of Generation Z is concerned: women allocate more time to educational and household tasks, while men devote more time to sports, recreation and digital entertainment (Jaumot-Pascual et al., 2018; Lee, 2023; Rosa et al., 2023; Wróblewski et al., 2022).

The COVID-19 pandemic caused unprecedented disruptions in leisure activity. Lockdowns and restrictions reduced opportunities for outdoor and social activities, accelerating the shift towards home-based and digital leisure (Brand et al., 2020; Han & Sa, 2022). For some, this period was marked by increased digital activity and remote socialisation (Bánhidi & Lacza, 2020; Young, 2020), while others perceived it as 'forced leisure', often associated with stress and lower wellbeing (Lazcano et al., 2022; Panarese & Azzarita, 2021). These changes may have lasting consequences for the structure and meaning of leisure (Casper et al., 2021; Foliano et al., 2024).

At the same time, broader socio-economic effects of the pandemic have been observed. Panek and Zwierzchowski (2025), using EU-SILC panel data, showed that the crisis significantly affected the incidence and depth of poverty in EU Member

States, with household structure and labour market participation identified as key factors. Their findings show that the pandemic's impact went far beyond health and education – it reshaped household economic conditions. Against this backdrop, the growing share of tertiary students combining study with paid work and reallocating their leisure time can be interpreted as a part of these broader socio-economic adjustments.

Despite the fact that the body of research dealing with leisure during the COVID-19 pandemic has been expanding, so far there has been no comparative study examining changes in tertiary students' time allocation before and after the pandemic. Existing papers have often focused either on short-term lockdown effects or on selected forms of digital leisure, while less attention has been devoted to the combined analysis of the structure of leisure, paid work and gender differences among Generation Z tertiary students. This indicates there is a research gap concerning the transformation of students' daily time budgets in the post-pandemic period.

The aim of the study discussed in the article is to identify changes which took place in the time budget and structure of leisure activities of Generation Z tertiary students in Poland after the COVID-19 pandemic compared to the pre-pandemic period, paying particular attention to gender differences and the role of paid work. Our objective is to identify statistically significant shifts in daily time budgets and leisure structures across the three survey waves (2018, 2020, 2023). The analysis is based on primary survey data obtained from 763 students, and applies classical statistical methods, such as ANOVA with Tukey's post-hoc tests, chi-square tests and Student's *t*-tests.

2. Research method

The study is based on primary data collected through a survey from Generation Z tertiary students in Poland. As mentioned before, the three waves of the survey were carried out in 2018 (before the pandemic), 2020 (shortly before its outbreak), and 2023 (after the pandemic), and the participants were first- and second-year full-time students of economics and management from the Wrocław University of Economics and Business (the branch in Jelenia Góra) and the University of Szczecin. The results are then representative for this specific group of tertiary students and should not be generalised to the entire student population or the whole Generation Z in Poland. The survey was administered during regular classes and completed by all attending students, which resulted in a 100% response rate. This procedure resembles the census approach within a defined subpopulation, ensuring high reliability of the findings for a particular group (Wątroba, 2013). In total, 763 students participated

in all the waves of the survey. More specifically, there were 338 participants in 2018, 98 in 2020 and 327 in 2023. The participation was voluntary and anonymous, which ensured reliable responses and minimised the risk of social desirability bias (Tourangeau & Yan, 2007).

The questionnaire consisted of four main sections. In the first part, respondents indicated how many hours per day (on weekdays and weekends) they devoted to specific activities, such as: studying, paid work, household duties, physical activity, social interactions, media use, and sleep. The second part concerned leisure preferences, where students selected those activities which they considered most typical or desirable from a list of several pastimes. The third part focused on the forms of and preferences regarding paid work, including the source of income, working hours and reasons for taking up a job. The final section was a metric, covering basic information such as gender, year of study and employment status.

The questionnaire was standardised and applied in the same form across all the three survey waves, which ensured comparability of the results over time. The collected data were cleaned of missing and inconsistent values and subsequently analysed using Excel and Statistica 13.1 software by means of classical statistical methods. One-way analysis of variance (ANOVA) was used to test the differences in mean time allocations across the three survey years. This method is widely applied in social sciences to identify whether group means differ significantly (Field, 2018). We used Tukey's post-hoc test for multiple comparisons to determine between which groups the differences occurred (Abdi & Williams, 2010). We also employed chi-square tests to examine changes in the structure of leisure preferences, which is an appropriate method for categorical variables (Agresti, 2019). To assess gender differences in the use of leisure, Student's *t*-test was applied. Together, these methods provided a comprehensive framework for evaluating both temporal and gender-related changes in leisure patterns.

This methodological approach made it possible to assess statistically significant shifts in the allocation of students' time, to examine the persistence of gender-based differences, and to capture broader trends in the behaviour of the youth during the COVID-19 pandemic. As with all survey-based studies relying on self-reported data, the results may have been affected by a recall bias and a social desirability bias; therefore, the findings should be interpreted as reflecting declared rather than directly observed behaviours. It should also be noted that the study is not based on observations from the period of the strictest lockdowns.

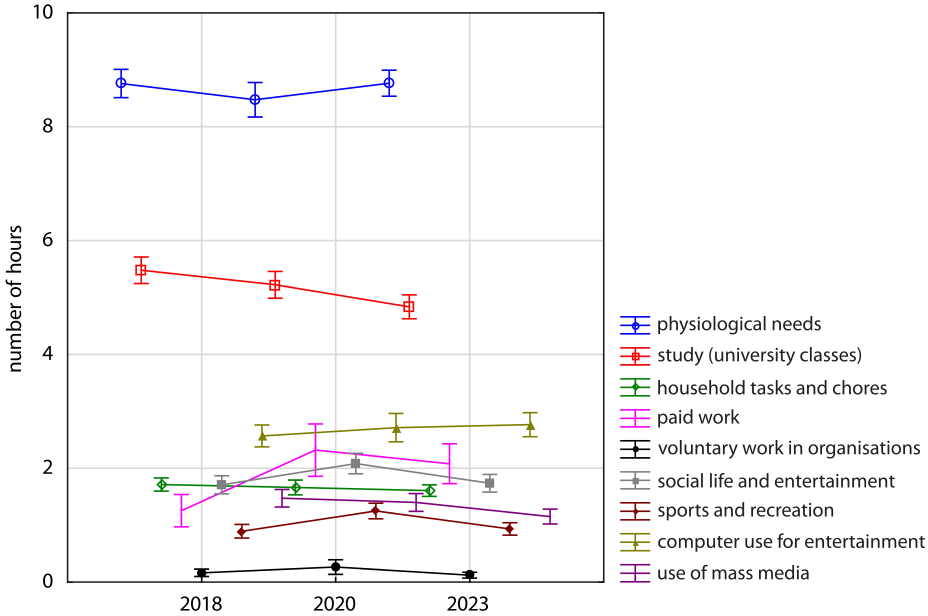
3. Results and discussion

The analysis of daily time budgets showed statistically significant differences in the allocation of time across the three survey years. ANOVA results confirmed that important changes in the structure of students' activities occurred during the pandemic. The most notable shift was observed in the length of studying time, which decreased systematically after 2018. Tukey's post-hoc tests indicated that the average time devoted to studying in 2023 was much lower than it was both in 2018 and in 2020. This pattern may reflect not only the temporary disruptions caused by remote education but also a broader change in students' approach to learning. Similar trends were observed in international studies, where a decline in learning-related activities among students was reported during and after the pandemic (Lazcano et al., 2022; Panarese & Azzarita, 2021).

Figure 1 presents the average daily durations (in hours) of selected activities performed by Generation Z tertiary students on weekdays on the basis of sample means for the three survey waves (2018: $N = 338$; 2020: $N = 98$; 2023: $N = 327$). The values represent the sample means based on the survey data (total $N = 763$), complemented by 95%-confidence intervals, which makes it possible to assess both the central trends and the statistical reliability of the results. From Figure 1 it is evident that the largest portion of the daily time budget was devoted to physiological activities. Their average duration in all the survey years exceeded eight hours a day, with the average values remaining at a similar level each year (between 8.5 hours and 8.8 hours), except for a slight increase in 2023 compared to 2020. This stability suggests that basic biological needs consistently remain a priority, even in the face of external changes.

The second-largest part of students' daily time budget was dedicated to studying. The average time spent on this activity systematically decreased from approximately 5.48 hours a day in 2018 to 4.84 hours in 2023. The decline in time devoted to studying was most noticeable in 2023. It is possible that the shift to remote learning and the development of flexible and self-study education formats resulted in students' reduced direct engagement in traditional university classes.

Figure 1. Average daily durations of weekday activities of Generation Z tertiary students



Note. Sample means with 95%-confidence intervals. The interval widths reflect discrepancies between responses across the survey waves. *N* = 763.
Source: authors' work.

The third-largest portion of students' time was allocated to computer use for entertainment. There has been a steady increase in the time devoted to this activity, from approximately 2.57 hours in 2018 to 2.77 hours in 2023. This indicates the growing significance of technology and digital entertainment in students' lives. This may also be related to the widespread availability of digital content and the increasing role of the internet as a primary source of entertainment. In other European Union countries, the increased reliance on digital forms of leisure was observed as well (Eurofound, 2020).

What is noteworthy is the significant increase in the average time devoted to paid work in 2020 (2.32 hours per day) compared to 2018 (1.25 hours). Although the average time spent on this activity decreased in 2023 compared to 2020, paid work ranked fourth in terms of students' time commitment in both of these years.

There has been a steady reduction in the average time dedicated to household tasks and chores, from approximately 1.71 hours in 2018 to 1.61 hours in 2023, as well as a decrease in the average time spent using mass media, from 1.47 hours in 2018 to about 1.15 hours in 2023. The average time allocated to other weekday activities (voluntary work in organisations, social life and entertainment, sports and recreation) increased in 2020 compared to 2018, but then, in 2023, declined in comparison to 2020.

Tertiary students devoted the shortest time to voluntary work in organisations (0.1–0.3 hours on average) and to sports and recreation (0.9–1.3 hours) on weekdays.

To determine whether there were significant differences in the average duration of each activity across the years, we used a one-way analysis of variance (ANOVA).

Table 1. Results of the one-way ANOVA for sample-mean daily durations of students' activities on weekdays across the three survey waves

Type of activity	<i>F</i>	<i>p</i> -value
Physiological needs	1.435	0.239
Study (university classes)	8.759	0.000
Household tasks and chores	0.922	0.398
Paid work	9.310	0.000
Voluntary work in organisations	2.960	0.052
Social life and entertainment	5.165	0.006
Sports and recreation	7.965	0.000
Computer use for entertainment	0.954	0.386
Use of mass media	5.716	0.003

Source: authors' work.

Table 1 shows that statistically significant differences ($p < 0.05$) in the average duration of students' activities on weekdays across the three survey years occurred with regard to the following activities: university classes, paid work, social life and entertainment, sports and recreation and the use of mass media.

For the remaining weekday activities, no statistically significant differences in their average duration were observed between the study years. However, in the case of voluntary work in organisations, the result was close to the adopted significance threshold ($p = 0.052$), which may indicate a tendency towards differences between the survey waves. To further examine in which periods significant differences occurred, Tukey's multiple comparison test was applied. The results, expressed as p -values for pairwise comparisons between 2018, 2020 and 2023, are presented in Table 2.

Table 2. Results of Tukey's test (p -values) for differences in the average time spent on weekday activities between pairs of survey years

Type of activity	Comparison between pairs of survey years		
	2018 and 2020	2018 and 2023	2020 and 2023
Physiological needs	0.302	1.000	0.275
Study (university classes)	0.295	0.000	0.054
Household tasks and chores	0.826	0.364	0.795

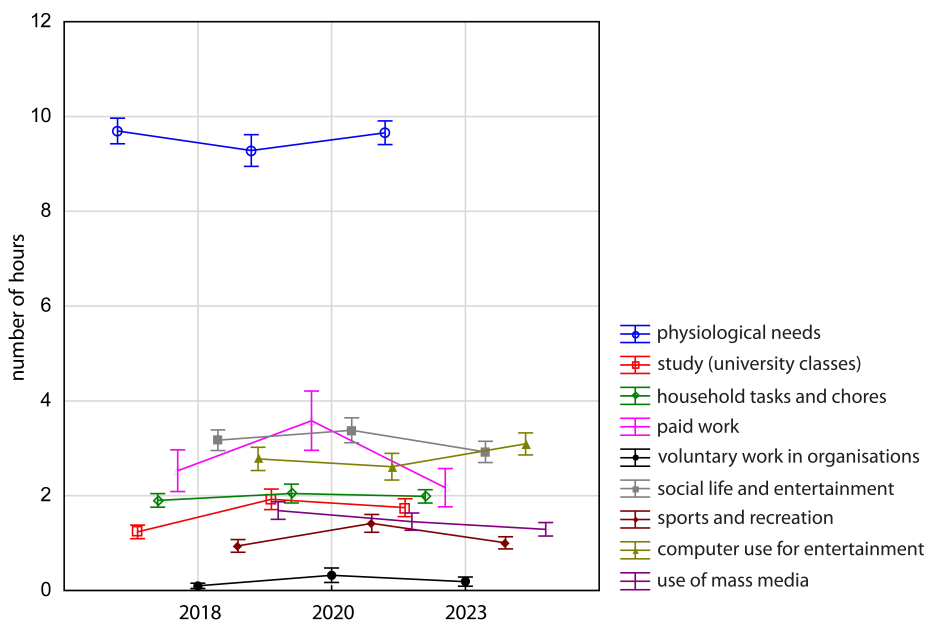
Table 2. Results of Tukey's test (p -values) for differences in the average time spent on weekday activities between pairs of survey years (cont.)

Type of activity	Comparison between pairs of survey years		
	2018 and 2020	2018 and 2023	2020 and 2023
Paid work	0.001	0.001	0.665
Voluntary work in organisations	0.207	0.639	0.040
Social life and entertainment	0.009	0.964	0.015
Sports and recreation	0.001	0.870	0.002
Computer use for entertainment	0.646	0.367	0.942
Use of mass media	0.787	0.003	0.071

Source: authors' work.

Data from Table 2 indicates that statistically significant differences in the average daily time devoted to students' activities on weekdays occurred between 2018 and 2020 and between 2020 and 2023 for the following activities: social life and entertainment and sports and recreation. Meanwhile, in 2020 compared to 2018, and in 2023 compared to 2018, statistically significant differences were observed for paid work. Additionally, in 2023, there was a significant reduction in the average time spent on studying and the use of mass media compared to 2018. By the same token, in 2023 compared to 2020, a statistically significant reduction in the average time devoted to voluntary work in organisations was recorded. For the remaining pairs of the survey waves, no statistically significant differences were observed in the average daily durations of students' activities.

Figure 2 presents the average daily durations (in hours) of the same activities performed by students on weekends, based on sample means for the three survey waves (2018: $N = 338$; 2020: $N = 98$; 2023: $N = 327$). The values represent the sample means based on the survey data (total $N = 763$), complemented by 95%-confidence intervals, which makes it possible to assess both the central trends and the statistical reliability of the results. From Figure 2, it is evident that the largest portion of the daily time budget on weekends continued to be occupied by physiological activities. The average duration of these activities exceeded nine hours per day across all the years of the survey, with the average values remaining at a similar level each year (9.3–9.7 hours). Social life and entertainment consumed the second-largest portion of students' time on weekends in 2018 (3.17 hours on average), but was replaced in 2020 by paid work (3.58 hours), which, in turn, was surpassed by computer use for entertainment in 2023 (3.09 hours). This latter activity ranked third in the students' time budget in 2018 (2.78 hours on average) and fourth in 2020 (2.61 hours).

Figure 2. Average daily durations of Generation Z tertiary students' activities at weekends

Note. Sample means with 95%-confidence intervals. The interval widths reflect discrepancies between responses across the survey waves. $N = 763$.
Source: authors' work.

The duration of most activities increased in 2020 compared to 2018, and then decreased in 2023 compared to 2020. This was the case with activities such as: studying, paid work, voluntary work in organisations, social life, sports and recreation and the use of mass media. Only in the case of computer use for entertainment, there was a reduction in the average time spent on this activity daily in 2020 compared to 2018, followed by an increase in 2023 compared to 2020.

At weekends, students spent the smallest portion of time on voluntary work in organisations (0.1–0.2 hours on average) and on sports and recreation (0.9–1.0 hours). Studying also occupied relatively little of students' time at weekends (1.2–1.6 hours). To determine whether there were significant differences in the average durations of each activity across the years, ANOVA was applied.

Data from Table 3 shows that statistically significant differences (at a significance level of 0.05) in the average daily durations of tertiary students' activities at weekends were observed for all types of activities except for physiological needs and household tasks.

Table 3. Results of the one-way ANOVA for the average durations of students' activities at weekends across the three survey waves

Type of activity	<i>F</i>	<i>p</i> -value
Physiological needs	2.241	0.107
Study (university classes)	14.318	0.000
Household tasks and chores	0.776	0.461
Paid work	7.687	0.000
Voluntary work in organisations	4.075	0.017
Social life and entertainment	3.576	0.028
Sports and recreation	9.688	0.000
Computer use for entertainment	3.630	0.027
Use of mass media	6.079	0.002

Source: authors' work.

Additionally, Tukey's multiple comparison test was used to assess the statistical significance of differences in the average time spent on weekend activities across the study periods. The results, expressed as *p*-values for pairwise comparisons between 2018, 2020 and 2023, are presented in Table 4.

Table 4. Results of Tukey's test (*p*-values) for differences in the average time spent on weekend activities between the pairs of survey years

Type of activity	Comparison between pairs of survey years		
	2018 and 2020	2018 and 2023	2020 and 2023
Physiological needs	0.125	0.979	0.166
Study (university classes)	0.000	0.000	0.418
Household tasks and chores	0.441	0.707	0.862
Paid work	0.012	0.480	0.000
Voluntary work in organisations	0.013	0.308	0.194
Social life and entertainment	0.459	0.262	0.023
Sports and recreation	0.000	0.779	0.001
Computer use for entertainment	0.665	0.152	0.028
Use of mass media	0.178	0.001	0.427

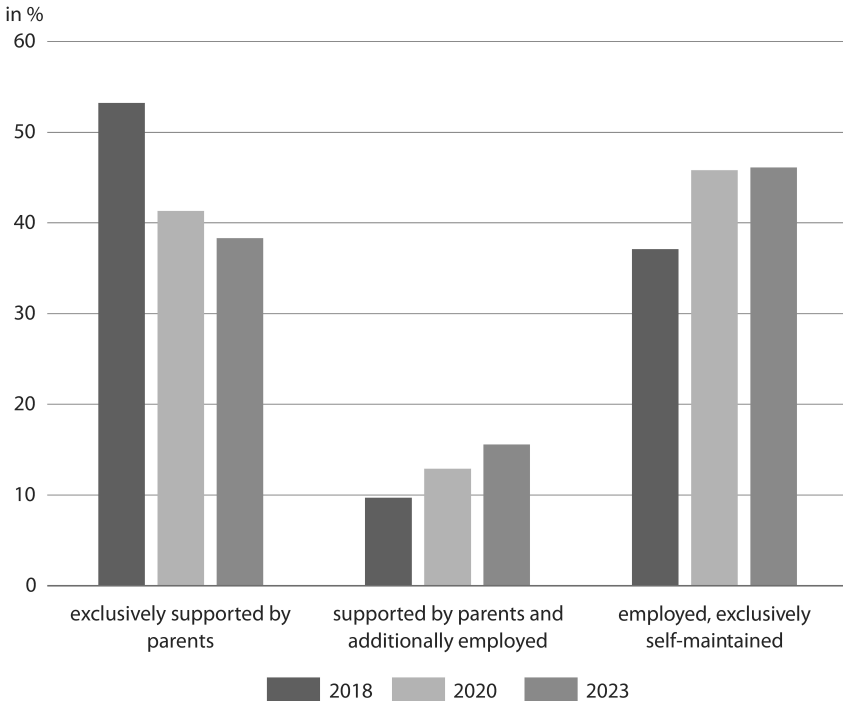
Source: authors' work.

In Table 4, we can see statistically significant differences in the duration of studying at weekends between the survey waves in 2018 and 2020 (a significant increase in the average time spent on this activity) and between those in 2018 and 2023 (a significant decrease in the average time spent on this activity). Statistically significant differences

in the average daily durations of activities could also be observed for paid work and sports and recreation between the survey waves in 2018 and 2020 and between those in 2020 and 2023. These differences may reflect broader social and economic changes affecting students' lifestyles during the analysed periods, including increased engagement in paid work and shifts in leisure patterns associated with changing forms of social interaction and recreation.

These results not only indicate shifts in the amount of time devoted to paid work, but also point to broader changes in the economic activity of students. The share of students combining study with paid work increased across the three waves of the survey. Chi-square tests confirmed statistically significant growth in the proportion of working students, particularly in 2023. This finding can be interpreted as a response to changing economic conditions, consistent with evidence that the pandemic intensified financial pressure on households (Panek & Zwierzchowski, 2025). The increase in student employment is also in line with earlier studies indicating that young people often responded to economic shocks by reallocating their time from education and leisure to income-generating activities (Han & Sa, 2022).

Figure 3. Percentage of students engaged in paid work across the three survey waves



Source: authors' work.

The structure of students' employment status changed significantly over the study period. In 2018, more than half of respondents (53.2%) declared that they were exclusively supported by their parents, 37.1% were fully self-maintained, while only 9.7% combined parental support with paid work (Figure 3). In 2020, just before the outbreak of the pandemic, the share of students relying solely on parental support decreased to 41.3%, the proportion of those combining parental support with employment increased to 12.9%, and the group of fully self-maintained students increased to 45.8%. By 2023, this trend became even more pronounced: the share of students earning their living independently amounted to 46.1%, while the group relying exclusively on their parents' support shrank to 38.3%.

These results, confirmed by chi-square tests, highlight the growing role of paid work in students' lives. The data reflect not only individual choices but also broader socio-economic conditions resulting from the pandemic. As Panek and Zwierzchowski (2025) demonstrated, the pandemic aggravated poverty risks across EU households, which may have pushed young people to seek financial independence earlier than previous cohorts. The steady growth in the proportion of working students – from 37.1% in 2018 to 46.1% in 2023 – suggests a long-term reallocation of time towards income-generating activities at the expense of traditional study and leisure.

Changes were also visible in the students' declared preferences regarding ways of spending their leisure time. The majority of the respondents in all the three compared periods indicated that they enjoyed 'spending time with family and friends' (Table 5). The percentage of such respondents remained relatively stable over time, ranging from about 60% to 62%. The chi-square test comparing the preference structures across the three survey waves showed no statistically significant differences in respondents' preferences for this form of activity. Another highly-ranked form of spending leisure time was 'relaxing'. The percentage of respondents preferring this activity increased from 55.8% in 2018 to 62.2% in 2020, and then decreased to slightly above 50% in 2023. The significant change in this percentage over time ($p < 0.05$) suggests that in the pandemic students needed more time for recovery, whereas by 2023, when life returned to normalcy, their increased need for relaxation withered away. 'Listening to the music or watching television' was also ranked high among students' leisure activities. In 2023, respondents clearly preferred this kind of activity over other ways of spending their leisure (67.46%). In 2018, the percentage of such responses was 50.56%, and in 2020, this option had 45.27% of indications. The fraction of respondents choosing to listen to the music or watch television changed significantly over time ($p < 0.05$). This increase may be the result of a greater access to streaming platforms and the growing importance of digital media in everyday life. 'Catching up on sleep' was another highly-ranked form of spending leisure.

The percentage of respondents choosing this activity remained between 40% and 42%, with a slight downward trend across the three compared years. The difference between the percentages of respondents choosing this activity in subsequent survey waves was not statistically significant ($p = 0.959$).

Table 5. Percentage of responses to the question about preferred ways of spending leisure time

Type of activity	2018	2020	2023	chi-square	p-value
	in %				
I relax	55.81	62.19	50.51	6.625	0.036
I catch up on sleep	41.57	40.80	40.34	0.089	0.956
I read	23.22	20.90	20.68	0.620	0.733
I listen to music or watch TV	50.56	45.27	67.46	28.240	0.000
I spend time with family and friends	59.93	61.69	59.66	0.229	0.892
I go out	37.45	35.82	22.37	17.574	0.000
I do sports	25.09	30.85	27.46	1.903	0.386
I do housework (catching up on cleaning, DIY)	15.73	23.88	24.75	7.810	0.020
I play computer games	30.71	24.88	27.80	1.950	0.377
I study (read, acquire knowledge)	12.36	14.43	20.68	7.750	0.021
I dedicate time to my favourite hobbies	25.84	28.36	17.97	8.489	0.014

Source: authors' work.

Another popular activity was 'going out'. In 2018, it was chosen by 37.45% of respondents, but its popularity declined to 35.82% in 2020 and 22.37% in 2023, with the differences being statistically significant. Sports and computer games, in contrast, remained at a relatively stable level over the three survey years, with about one quarter of respondents choosing these activities in each wave (p -values of 0.386 and 0.377, respectively).

Some forms of leisure, although less frequently indicated, showed interesting upward trends. Studying as a leisure activity increased from 12.36% in 2018 to 20.68% in 2023 ($p = 0.021$), while household tasks, such as cleaning or DIY, grew from 15.73% of indications to 24.75% over the same period. It is likely that the pandemic limitations, by forcing young people to spend more time at home, resulted in their increased engagement in domestic duties.

After identifying these general patterns, it was equally important to analyse how leisure preferences and time allocation varied by gender. Student's t -tests and chi-square tests were applied to examine mean differences and structural changes. The results show consistent patterns: women devoted more time than men to studying, household tasks, physiological needs, and media consumption, while men allocated

significantly more time to computer use for entertainment and, in some years, to sports and recreation. These findings correspond with earlier research indicating persistent gender-based disparities in leisure practices (Jaumot-Pascual et al., 2018; Rosa et al., 2023).

The dynamics of change also differed between men and women. For example, the average time women devoted to studying and household tasks tended to decrease from one survey wave to another, while in the case of men, these activities initially increased in 2020 compared to 2018, and then declined again in 2023. Women showed a steady increase in time spent on paid work, whereas the men's pattern regarding this activity was less linear, with an increase in 2020 followed by a decline in 2023. Similarly, computer use for entertainment became steadily more and more popular among women, whereas among men, there was a decrease in the popularity of this activity in 2020 and a rebound in 2023. Despite these fluctuations, men spent significantly more time on computer-based entertainment than women over the whole period of study, which reflects male students' greater preference for digital gaming.

Gender-specific differences were also visible in the ranking of preferred leisure activities. Both in 2018 and 2020, women most frequently chose 'spending time with family and friends', while in 2023, their preference shifted to 'listening to the music or watching television'. In the case of men, the top choice was 'computer games' in 2018, 'relaxing' in 2020, and 'music/television' in 2023. Leisure activities ranked second and third also varied across the survey waves, with women more often selecting 'relaxing' and 'sleep', and men alternating between 'relaxing', 'family time' and 'digital leisure'. These patterns suggest that although both genders adapted to the pandemic conditions, the ways they reorganised their leisure time continued being influenced by traditional gender preferences and roles.

Overall, our analysis confirms that while some activities such as relaxing or spending time with family remained at a stable level of popularity with tertiary students throughout the three subsequent survey waves, the popularity of others, particularly of digital leisure and domestic tasks, significantly varied throughout the study period. Gender continued to play an important role in shaping leisure choices, both in terms of time allocation and in the hierarchy of preferred activities.

4. Conclusions

The aim of the study discussed in the article is to identify changes which took place in the time budget and structure of leisure activities of Generation Z tertiary students in Poland after the COVID-19 pandemic compared to the pre-pandemic period, paying particular attention to gender differences and the role of paid work. The results confirmed that significant changes took place within students' hierarchy of

preferences: studying became less important in their daily schedules, while paid work and digital leisure became more relevant. This shift might indicate an increasing pressure to combine studying with employment, which might influence students' wellbeing, academic involvement, and work-study balance. At the same time, an increased incidence of selecting 'studying, reading, and acquiring knowledge' as a favourite way of spending one's leisure might suggest that some students became increasingly engaged with individual forms of learning, thus broadening their intellectual horizons beyond the scope of university courses. This might reflect wider changes in the ways young people started to acquire knowledge and develop competencies in the digital era. At the same time, persistent gender-based differences were observed, with women devoting more time to studying and household duties, while men engaging more in sports and digital activities. These findings show that the pandemic contributed to a relatively permanent reorganisation of everyday activities of young people. Our results point to long-term post-pandemic adjustments in students' use of time rather than real-time behavioural responses during the peak of pandemic restrictions. The study highlights the usefulness of classical statistical methods in identifying social change and provides insights that may be relevant to creating educational policies that would address the evolving needs of the younger generation. The results indicate the advisability to better accommodate the growing tendency among students to engage in paid employment and the increasing role of digital forms of leisure, e.g. by promoting more flexible study schedules, supporting the work-study balance and strengthening digital competencies within higher education curricula. However, it should be remembered that our research was based on a limited sample of students, therefore the results are not representative of the entire student population in Poland.

References

- Abdi, H., & Williams, L. J. (2010). Tukey's Honestly Significant Difference (HSD) Test. In N. Salkind (Ed.), *Encyclopedia of Research Design* (pp. 1–5). Sage.
<https://personal.utdallas.edu/~herve/abdi-HSD2010-pretty.pdf>.
- Agresti, A. (2019). *An introduction to categorical data analysis* (3rd ed.). Wiley.
- Bánhidi, M., & Lacza, G. (2020). Lifestyle changes during Covid-19 period in Hungary – feedback of university students. *World Leisure Journal*, 62(4), 325–330.
<https://doi.org/10.1080/16078055.2020.1825251>.
- Bombol, M. (2008). *Czas wolny jako kategoria diagnostyczna procesów rozwoju społeczno-gospodarczego*. Szkoła Główna Handlowa w Warszawie.
- Brand, R., Timme, S., & Nosrat, S. (2020). When Pandemic Hits: Exercise Frequency and Subjective Well-Being During COVID-19 Pandemic. *Frontiers in Psychology*, 11, 1–10.
<https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.570567>.

- Casper, J. M., Bocarro, J. N., & Lothary, A. F. (2021). An examination of pickleball participation, social connections, and psychological well-being among seniors during the COVID-19 pandemic. *World Leisure Journal*, 63(3), 330–346. <https://doi.org/10.1080/16078055.2021.1957708>.
- Cha, Y. J. (2024). A longitudinal study on changes in weekend leisure time by age groups in Korea (1999–2019). *BMC Public Health*, 24(1), 1–10. <https://doi.org/10.1186/s12889-024-18101-z>.
- Davidovitch, N., & Soen, D. (2016). Leisure in the twenty-first century: The case of Israel. *Israel Affairs*, 22(2), 492–511. <https://doi.org/10.1080/13537121.2016.1140347>.
- Demirbaş, G. (2020). Locating leisure as the route to well-being: Challenges of researching women's leisure in Turkey. *Leisure Studies*, 39(1), 56–67. <https://doi.org/10.1080/02614367.2019.1627391>.
- Dimock, M. (2019, 17 January). *Defining generations: Where Millennials end and Generation Z begins*. Pew Research Center. <https://www.pewresearch.org/short-reads/2019/01/17/where-millennials-end-and-generation-z-begins/>.
- Eurofound. (2020). *Living, working and COVID-19*. Publications Office of the European Union. <https://www.eurofound.europa.eu/publications/report/2020/living-working-and-covid-19>.
- Field, A. (2018). *Discovering statistics using IBM SPSS statistics* (5th ed.). Sage.
- Foliano, F., Tonei, V., & Sevilla, A. (2024). Social restrictions, leisure and well-being. *Labour Economics*, 87, 1–21. <https://doi.org/10.1016/j.labeco.2023.102485>.
- Freeman, M. (2022, 21 January). Time use of millennials and Generation X: differences across time. *Monthly Labor Review*, (1), 1–20. <https://doi.org/10.21916/mlr.2022.3>.
- Han, J. H., & Sa, H. J. (2022). Leisure attitudes, stress-related growth, and quality of life during COVID-19-related social distancing. *Social Behavior and Personality: an international journal*, 50(2), 1–16. <https://doi.org/10.2224/sbp.11015>.
- Iso-Ahola, S. E., & Baumeister, R. F. (2023). Leisure and meaning in life. *Frontiers in Psychology*, 14, 1–11. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1074649>.
- Jaumot-Pascual, N., Monteagudo, M. J., Kleiber, D. A., & Cuenca, J. (2018). Gender Differences in Meaningful Leisure Among Older Adults: Joint Displays of Four Phenomena. *Frontiers in Psychology*, 9, 1–11. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01450>.
- Kuykendall, L., Boemerman, L., & Zhu, Z. (2018). The Importance of Leisure for Subjective Well-Being. In E. Diener, S. Oishi, & L. Tay (Eds.), *Handbook of Well-Being* (pp. 433–446). DEF Publishers. <https://digitalcommons.unomaha.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1298&context=psychfacpub>.
- Lamberti, G., López-Sintas, J., & Lopez Belbeze, P. (2023). The impact of internet use on leisure: Gender and age heterogeneity in young people. *Journal of Leisure Research*, 54(5), 581–601. <https://doi.org/10.1080/00222216.2023.2193178>.
- Lazcano, I., Doistua, J., & Madariaga, A. (2022). Effects of the COVID-19 Pandemic on Leisure among the Youth of Spain. *Sustainability*, 14(7), 1–16. <https://doi.org/10.3390/su14073993>.
- Lee, Y. K. (2023). Gender differences in leisure: from the relationship between leisure type-time and time use satisfaction in Korea. *World Leisure Journal*, 65(1), 79–100. <https://doi.org/10.1080/16078055.2022.2136746>.
- Mansfield, L., Daykin, N., & Kay, T. (2020). Leisure and wellbeing. *Leisure Studies*, 39(1), 1–10. <https://doi.org/10.1080/02614367.2020.1713195>.

- Munusturlar, M. A., & Argan, M. (2016). Development of the serious and casual leisure measure. *World Leisure Journal*, 58(2), 124–141. <https://doi.org/10.1080/16078055.2015.1126759>.
- Panarese, P., & Azzarita, V. (2021). The Impact of the COVID-19 Pandemic on Lifestyle: How Young people have Adapted Their Leisure and Routine during Lockdown in Italy. *YOUNG*, 29(4S), 35–64. <https://doi.org/10.1177/11033088211031389>.
- Panek, T., & Zwierzchowski, J. (2025). Impact of the COVID-19 pandemic on poverty in the European Union: insights from panel data on incidence, depth and key drivers. *Wiadomości Statystyczne. The Polish Statistician*, 70(7), 1–35. <https://doi.org/10.59139/ws.2025.07.1>.
- Pourahmad, A., Hosseini, A., Banaitis, A., Nasiri, H., Banaitienė, N., & Tzeng, G.-H. (2015). Combination of fuzzy-AHP and DEMATEL-ANP with GIS in a new hybrid MCDM model used for the selection of the best space for leisure in a blighted urban site. *Technological and Economic Development of Economy*, 21(5), 773–796. <https://doi.org/10.3846/20294913.2015.1056279>.
- Rosa, C. D., Larson, L. R., Collado, S., Cloutier, S., & Profice, C. C. (2023). Gender differences in connection to nature, outdoor preferences, and nature-based recreation among college students in Brazil and the United States. *Leisure Sciences*, 45(2), 135–155. <https://doi.org/10.1080/01490400.2020.1800538>.
- Sintas, J. L., de Francisco, L. R., & Álvarez, E. G. (2015). The Nature of Leisure Revisited: An Interpretation of Digital Leisure. *Journal of Leisure Research*, 47(1), 79–101. <https://doi.org/10.1080/00222216.2015.11950352>.
- Tarczoń, R. (2017). *Ogniska pracy pozaszkolnej a czas wolny młodzieży. Studium socjologiczno-pedagogiczne na przykładzie środowiska rybnicko-mikołowskiego*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego. <https://sbc.org.pl/dlibra/publication/345194/edition/326128/ogniska-pracy-pozaszkolnej-a-czas-wolny-mlodziezy-studium-socjologiczno-pedagogiczne-na-przykladzie-srodowiska-rybnicko-mikolowskiego-tarczon-radoslaw>.
- Tourangeau, R., & Yan, T. (2007). Sensitive questions in surveys. *Psychological Bulletin*, 133(5), 859–883. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.133.5.859>.
- Üstün, U. D., Topal, A., Yılmaz, O., & Özer, B. (2021). Analyzing the Differences in the Leisure Benefit Perceptions of Male and Female High School Students with Different Leisure Choices. *Journal for Educators, Teachers and Trainers*, 12(4), 119–125. <https://doi.org/10.47750/jett.2021.12.04.016>.
- Wątroba, J. (2013). *Praktyczne aspekty szacowania liczebności próby w badaniach empirycznych*. https://media.statsoft.pl/_old_dnn/downloads/praktyczne_aspekty_szacowania_liczebności_próby.pdf.
- Wróblewski, F., Żegarski, P., & Szydło, J. (2022). Wykorzystanie czasu wolnego przez studentów Politechniki Białostockiej. *Akademia Zarządzania*, 6(2), 307–326. <https://doi.org/10.24427/az-2022-0028>.
- Young, M. E. M. (2020). Leisure pursuits in South Africa as observed during the COVID-19 pandemic. *World Leisure Journal*, 62(4), 331–335. <https://doi.org/10.1080/16078055.2020.1825252>.
- Zajadacz, A. (2021). Wstęp. In A. Zajadacz (Ed.), *Zmiany w budżecie czasu wolnego i zachowaniach wolnoczasowych mieszkańców dużych miast w wyniku pandemii COVID-19. Uwarunkowania i plany rozwoju turystyki* (pp. 7–10). Bogucki Wydawnictwo Naukowe.

Wpływ technologii zależnej od kapitału na pracującego na równowagę uogólnionego modelu Solowa

The influence of technology dependent on capital-labour ratio on the equilibrium of the generalised Solow model

Adam Krawiec^a, Anna Połec^b, Tomasz Tokarski^c

Streszczenie. Celem artykułu jest uogólnienie modelu wzrostu Solowa i pokazanie, że w tak uogólnionym modelu może istnieć więcej niż jeden nietrywialny punkt stacjonarny. W neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego, opierającej się na modelu Solowa-Swana, technologia jest egzogeniczna. Odmiennym podejściem charakteryzują się modele wzrostu, w których technologia (lub wiedza) jest kształtowana endogenicznie. Technologia egzogeniczna jest dana z zewnątrz, czyli model nie wyjaśnia, skąd się ona bierze, a endogeniczna występuje wówczas, gdy jej poziom jest zależny od innej zmiennej makroekonomicznej w modelu. W artykule zaproponowano alternatywne uogólnienie modelu Solowa z technologią endogeniczną, która jest związana z wielkością nakładów kapitału na pracującego w ten sposób, że wraz ze wzrostem jej wielkości rośnie poziom technologii. Zbadano również dynamikę modelu oraz wyznaczono punkty stacjonarne i przeanalizowano

^a Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Instytut Ekonomii, Finansów i Zarządzania, Katedra Ekonomii Matematycznej, Polska / Jagiellonian University in Kraków, Faculty of Management and Social Communication, Institute of Economics, Finance and Management, Department of Mathematical Economics, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9885-253X>. Autor korespondencyjny / Corresponding author, e-mail: adam.krawiec@uj.edu.pl.

^b Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Szkoła Doktorska Nauk Społecznych, Polska / Jagiellonian University in Kraków, Doctoral School at the Social Sciences, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1192-086X>. E-mail: ania.polec@doctoral.uj.edu.pl.

^c Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Instytut Ekonomii, Finansów i Zarządzania, Katedra Ekonomii Matematycznej, Polska / Jagiellonian University in Kraków, Faculty of Management and Social Communication, Institute of Economics, Finance and Management, Department of Mathematical Economics, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9551-0892>. E-mail: t.tokarski@uj.edu.pl.

ich stabilność. Przedstawione zostały warunki istnienia stabilnego stanu stacjonarnego. Ponadto przeprowadzono symulacje numeryczne w celu wyznaczenia trajektorii badanych zmiennych makroekonomicznych. Pokazano, że powyżej granicznej stopy oszczędności/inwestycji istnieją dwa nietrywialne punkty stacjonarne. Niestabilny punkt stacjonarny wyznacza granicę ubóstwa. Jeśli gospodarka startuje z poziomu kapitału na pracującego mniejszego od tego punktu, to w długim okresie zmienne makroekonomiczne są zbieżne do 0. Jeśli początkowy zasób kapitału na pracującego jest większy od tego punktu, to zmienne makroekonomiczne są zbieżne do stabilnego punktu stacjonarnego. Co więcej, ponieważ wielkość kapitału na pracującego zasadniczo determinuje zarówno poziom technologii, jak i wydajność pracy, obie zmienne zachowują się identycznie jak ów zasób.

Słowa kluczowe: endogeniczny model wzrostu gospodarczego, technologia, symulacje

Abstract. The aim of this article is to generalise the Solow growth model and to show that, in such a generalised model, there can be more than one non-trivial stationary point. In the neoclassical theory of economic growth, based on the Solow-Swan model, technology is exogenous. Growth models are characterised by a different approach, in which technology (or knowledge) is developed endogenously. Exogenous technology is introduced to the economy 'from the outside', while endogenous technology applies when its level depends on another macroeconomic variable in the model. This paper proposes an alternative generalisation of the Solow model with endogenous technology, which is related to the capital-labour ratio in such a way that the level of technology increases as the value of this variable grows. We also analysed the dynamics of the model, determined the stationary points and analysed their stability. Furthermore, we demonstrated the conditions allowing the existence of a stable stationary state. Numerical simulations were carried out to determine the trajectories of the macroeconomic variables examined in the study. We showed that there are two non-trivial stationary points above the savings rate threshold value. The unstable stationary point defines the poverty limit. If the initial level of capital per worker in an economy is below the value of this point, the macroeconomic variables converge to 0 in the long run. If the initial level of capital per worker is greater than this value, the macroeconomic variables converge to a stable stationary point. Moreover, since in general, the value of the capital-labour ratio determines both the level of technology and labour productivity, these variables behave in the same way as the former.

Keywords: endogenous growth model, technology, simulations

JEL: O41, C62, C63

1. Wprowadzenie

W drugiej połowie lat 50. XX w. Solow (1956) i Swan (1956) – niezależnie od siebie – przedstawili modele wzrostu gospodarczego, które stały się podstawą współczesnej neoklasycznej teorii wzrostu. W modelu Solowa-Swana¹ proces wzrostu gospodarczego jest zdeterminowany przez trzy zmienne: nakłady kapitału rzeczowego, nakłady pracy i technologię. Co więcej, w neoklasycznych modelach wzrostu zarówno nakłady kapitału, jak i nakłady pracy cechują się malejącymi produktywnościami krańcowymi, a technologia ma charakter egzogeniczny, czyli model nie wyjaśnia skąd się ona bierze – Allen (1975) opisał to za pomocą metafory, że technologia spada na gospodarke jak manna z nieba. Wartość technologii albo jest stała jak w oryginalnym modelu Solowa (1956), albo rośnie wykładniczo ze stałą stopą wzrostu (Solow, 1957; Swan, 1956). Istotnym rozszerzeniem neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego jest zróżnicowanie nakładów czynników produkcji połączone z uwzględnieniem oddziaływania na procesy produkcyjne zasobu kapitału ludzkiego (Mankiw i in., 1992) lub skończonej liczby różnych zasobów kapitałów (Nonneman i Vanhoudt, 1996) przy utrzymaniu założenia o malejącej krańcowej produktywności każdego z badanych czynników produkcji.

Zaletą modelu Solowa – lub bardziej ogólnie: neoklasycznej teorii wzrostu – jest również możliwość wprowadzenia do tego modelu lub modeli rozszerzeń uwzględniających różne aspekty funkcjonowania gospodarki lub społeczeństwa, takie jak równowaga rynku pracy, przestrzenne zróżnicowanie rozwoju gospodarki czy wpływ pandemii lub wojny na gospodarkę (Dykas i in., 2023; Filipowicz, 2019; Filipowicz i in., 2024a, 2024b).

Dyskusja nad założeniem o malejącej krańcowej produktywności czynników produkcji, której prekursorem był Arrow (1962), skupiła się na roli technologii i jej wpływie na wzrost gospodarczy. W drugiej połowie lat 80. i w latach 90. XX w. podjęto istotne próby endogenizacji postępu technicznego (szerzej: wiedzy), co doprowadziło do stworzenia endogenicznej teorii wzrostu gospodarczego (nazywanej także *nową teorią wzrostu*). Za prekursora tej teorii uważa się Romera (1986), który przedstawił pierwszy model wzrostu z endogeniczną wiedzą jako czynnikiem produkcji, charakteryzującą się rosnącą produktywnością krańcową. Z kolei w modelu wzrostu Lucasa (1988), będącym rozwinięciem idei Uzawy (1965), wzrost gospodarczy jest również wynikiem akumulacji kapitału ludzkiego przy założeniu niemalejącej produktywności krańcowej czynników produkcji. Kolejne modele wzrostu wiązały rozwój technologii z nakładami kapitału, pracy oraz wydatkami na badania i rozwój (Aghion i Howitt,

¹ W literaturze makroekonomicznej neoklasyczny model wzrostu gospodarczego Solowa nazywany jest również *modelem wzrostu Solowa-Swana*, dlatego w dalszej części pracy pojęcia modelu Solowa, modelu Solowa-Swana i neoklasycznego modelu wzrostu traktujemy jako tożsame.

1998; Grossman i Helpman, 1991; Romer, 1990). Teoria endogenicznego wzrostu gospodarczego stała się ważnym obszarem współczesnych badań makroekonomicznych dotyczących przyczyn i natury procesów wzrostu gospodarczego (Aghion i Howitt, 1998; Barro i Sala-i-Martin, 1995; Dykas i in., 2023, Filipowicz i in., 2024b; Malaga, 2013; Solow, 2000).

Można jeszcze wspomnieć o rozszerzonych modelach Solowa, które nie charakteryzują się dokładnie jednym nietrywialnym punktem stacjonarnym. Przyjęcie założenia o zmiennej stopie wzrostu liczby pracujących może prowadzić do dwóch nietrywialnych punktów stacjonarnych. Ferrara i Guerrini (2009) założyli, że zmiana liczby pracujących jest opisana funkcją logistyczną, co prowadzi do wystąpienia wielu punktów równowagi, w tym nie tylko stabilnego węzła, lecz także punktów siodłowych. Podobna modyfikacja stopy wzrostu liczby pracujących została zaproponowana przez Filipowicz i in. (2016). W tej pracy stopa wzrostu liczby pracujących jest malejącą funkcją wydajności pracy (postmaltuzjańska ścieżka wzrostu populacji), co prowadzi do zmodyfikowanego modelu Solowa, w którym może istnieć więcej niż jeden punkt stacjonarny lub może nie być żadnego punktu stacjonarnego z wyjątkiem punktu trywialnego. Z kolei przyjęcie niestandardowej ścieżki zmiany stopy liczby pracujących, podobnej do funkcji rozkładu normalnego Gaussa, powoduje, że zmodyfikowane równanie Solowa nie ma nietrywialnego punktu stacjonarnego, a wydajność pracy rośnie do plus nieskończoności (Filipowicz i in., 2017).

Złożona dynamika w zmodyfikowanym modelu Solowa może też być konsekwencją przyjęcia alternatywnej funkcji produkcji. Plata Pérez i Calderón (2009) zbadali zmodyfikowane modele Solowa i Ramseya, w których wprowadzono funkcję wzrostu Richardsa (1959) jako funkcję produkcji, i wykazali istnienie czterech typów punktów równowagi.

W modelu Solowa-Swana nie tylko stopa wzrostu liczby pracujących, lecz także stopa wzrostu technologii jest stała. Jak wskazaliśmy, zmienna stopa liczby pracujących była często rozważana w pracach teoretycznych. W artykule podejmujemy próbę zbadania wpływu zmiennej stopy technologii na dynamikę procesu wzrostu gospodarczego. Przedstawiamy uogólnienie modelu Solowa z technologią endogeniczną, którą kwantyfikujemy jako łączną produktywność czynników produkcji (ang. *total factor productivity* – TFP). W najczęściej rozważanych modyfikacjach stopa wzrostu liczby pracujących osiąga asymptotycznie wartość stałą. Podobne założenie czynimy dla stopy wzrostu technologii. Na skutek stałej dodatniej stopy postępu technicznego (np. w sensie Harroda) technologia rośnie do nieskończoności. Może to prowadzić do osobliwości technologicznej (Ulam, 1958), przy której – jak sądzimy – neoklasyczne modele wzrostu gospodarczego nie będą miały zastosowania. W oryginalnym modelu Solowa (1956) TFP jest stała, więc w tym sensie poziom technologiczny gospodarki okazuje się niezmienny. Swan (1956), konstruując model wzrostu gospodarczego,

przyjął założenie, że ta wielkość rośnie wykładniczo. Można uznać za zasadne występowanie dolnego i górnego ograniczenia dla zmienności TFP. Należy też zauważyć, że TFP jest szeroką miarą i może zawierać wiele różnych czynników, dlatego jej estymacja nie jest łatwa (Deboeck, 2023). Niemniej jednak takie próby są podejmowane i najnowsze badania empiryczne wskazują, że ta wielkość jest addytywna (Philippon, 2022), czyli jej wzrost jest liniowy.

W modelu proponowanym w niniejszym artykule przyjmujemy, że TFP rośnie wraz ze wzrostem nakładów kapitału na pracującego. Przedstawiony model jest uproszczony w tym sensie, że jako czynnik wzrostu TFP zawiera tylko techniczne uzbrojenie pracy, a pomija inne. Jeżeli gospodarka znajduje się daleko od stanu stacjonarnego, to wzrost TFP jest w przybliżeniu liniowy (ale wolniejszy niż liniowy). W miarę jak gospodarka zmierza do stanu stacjonarnego, wzrost TFP jest coraz wolniejszy, aż w punkcie stacjonarnym osiąga poziom 0. Oznacza to, że gdyby nakłady kapitału na pracującego w gospodarce rosły od 0 do nieskończoności, to TFP zwiększałaby się coraz wolniej od 0 do 1. Prezentowany model może być dobrym opisem gospodarki znajdującej się poza stanem długookresowej równowagi.

Badania nad wpływem TFP na wzrost gospodarczy łączą zarówno aspekt teoretyczny, jak i empiryczny (Baier i in., 2006; De Visscher i in., 2020; Heshmati i Rashidghalam, 2016; Welfe, 2003). W tej pracy przedstawiono nowy model teoretyczny. Zbadano również dynamikę tego modelu, istnienie punktu stacjonarnego² i jego stabilność oraz trajektorie, po których podstawowe zmienne makroekonomiczne zbieżają do długookresowej równowagi gospodarki.

Celem artykułu jest uogólnienie modelu wzrostu Solowa i pokazanie, że w tak uogólnionym modelu może istnieć więcej niż jeden nietrywialny punkt stacjonarny. Wskazujemy również, że jeśli istnieją dwa nietrywialne punkty stacjonarne, to pierwszy jest punktem niestabilnym, a drugi – stabilnym. Ponadto niestabilny punkt stacjonarny wyznacza granicę ubóstwa, ponieważ jeśli gospodarka startuje od poziomu kapitału na pracującego niższego od tego punktu, to zarówno kapitał na pracującego, jak i wydajność pracy oraz konsumpcja na pracującego są w długim okresie zbieżne do 0. Jeśli początkowy zasób kapitału na pracującego jest większy od tego punktu, to zmienne makroekonomiczne są zbieżne do stabilnego punktu stacjonarnego.

² Punkt stacjonarny równania różniczkowego danego wzorem $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$, gdzie funkcje $x(t)$ i $f(x)$ są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami $t \geq 0$ i $x \in P$ (przy czym P oznacza przestrzeń fazową powyższego równania różniczkowego), jest definiowany w pracy jako taka wielkość $\bar{x} \in P$, że $f(\bar{x}) = 0 \implies \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=\bar{x}} = 0$. W polskiej literaturze ekonomicznej ten punkt często jest nazywany *stanem ustalonym*, co wynika z mało precyzyjnego tłumaczenia (z punktu widzenia terminologii matematycznej) angielskiego terminu *steady state*. Ponieważ polscy matematycy zajmują się równaniami różniczkowymi znacznie dłużej niż ekonomiści, w artykule konsekwentnie stosujemy terminologię stricte matematyczną i rozważamy punkty stacjonarne (a nie stany ustalone) równania różniczkowego.

2. Założenia modelu

W prowadzonych dalej rozważaniach zakładamy, że funkcjonowanie gospodarki opisują następujące trzy równania³:

$$a(k(t)) = 1 - e^{-k(t)}, \quad (1)$$

$$y(t) = a(k(t))k^\alpha(t), \quad (2)$$

$$\dot{k}(t) = sy(t) - \mu k(t), \quad (3)$$

gdzie:

$a(t) \geq 0$ – technologia w momencie $t \geq 0$ (traktowana jako pojęcie pierwotne, którego kwantyfikacją jest TFP),

$k(t) \geq 0$ – nakłady kapitału na pracującego,

$y(t) \geq 0$ – wydajność pracy (czyli produkcja na pracującego),

$s \in (0, 1)$ – stopa oszczędności/inwestycji,

$\mu > 0$ – stopa ubytku kapitału na pracującego, będąca sumą stopy deprecjacji kapitału $\delta \in (0, 1)$ oraz stopy wzrostu liczby pracujących $n > 0$.

Parametr $\alpha \in (0, 1)$ zostanie zinterpretowany ekonomicznie w dalszej części opracowania.

Związek (1) uzależnia technologię a od zasobu kapitału na pracującego k . Z kolei równanie (2) jest funkcją wydajności pracy wynikającą z funkcji produkcji Cobba-Douglasa (1928) danej wzorem

$$Y = aK^\alpha L^{1-\alpha},$$

gdzie $Y, K, L \geq 0$ oznaczają kolejno wielkość produkcji, nakłady kapitału i nakłady pracy. Natomiast równanie różniczkowe (3) to równanie Solowa, z którego wynika, że przyrost kapitału na pracującego \dot{k} jest różnicą pomiędzy oszczędnościami/inwestycjami na pracującego sy a ubytkiem kapitału na pracującego μk .

³ Zakładamy, że wszystkie dalej badane zmienne są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \geq 0$. Zapis $x(t)$ będzie oznaczał trajektorię zmiennej x (która wyznacza wartości tej zmiennej w kolejnych momentach t), a $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ lub $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ – pochodną owej zmiennej po czasie. Pochodną $\dot{x}(t)$ możemy zaś utożsamiać z przyrostem wartości zmiennej x w momencie t .

3. Rozwiązanie modelu

Z równania (1) wynika, że w prowadzonych analizach technologię a uzależniamy od zasobu kapitału na pracującego k . Funkcja $a(k)$, opisująca zależności między tymi zmiennymi, charakteryzuje się następującymi własnościami⁴:

- $a: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$;
- $a(0) = 0$;
- $\forall k > 0 \quad (a'(k) = e^{-k} > 0 \wedge a''(k) = -e^{-k} < 0)$;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} a(k) = 1$.

Z powyższych własności funkcji $a(k)$ wynika, że jeśli kapitał na pracującego k rośnie od 0 do $+\infty$, to a także rośnie coraz wolniej od 0 do 1. Płynię stąd również wniosek, że w rozważanym modelu – w przeciwieństwie do neoklasycznych modeli wzrostu z egzogenicznym postępem technicznym Solowa (1956), Swana (1956), Mankiwa i in. (1992) czy Nonnemana i Vanhoudta (1996) – technologia nie jest zmienną rosnącą wykładniczo do $+\infty$, ale jej wartości zmieniają się jedynie w przedziale⁵ $[0, 1)$.

Po wstawieniu równania (1) do funkcji wydajności pracy (2) otrzymujemy

$$y = f(k) = (1 - e^{-k})k^\alpha, \quad (4)$$

z czego wynika, że:

- $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$;
- $f(0) = 0$;
- $\forall k > 0 \quad f'(k) = e^{-k}k^\alpha + \alpha(1 - e^{-k})k^{\alpha-1} > 0$;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left((1 - e^{-k})k^\alpha \right) = +\infty$,

czyli jeśli nakłady kapitału na pracującego rosną od 0 do $+\infty$, to wydajność pracy rośnie od 0 do $+\infty$.

Ze związku (4) wnioskujemy również, że elastyczność ε wydajności pracy y względem nakładów kapitału na pracującego k opisuje równanie

$$\varepsilon(k) = f'(k) \cdot \frac{k}{f(k)} = \frac{e^{-k}k^{\alpha+1} + \alpha(1 - e^{-k})k^\alpha}{(1 - e^{-k})k^\alpha} = \alpha + \frac{k}{e^k - 1}.$$

⁴ Zapis typu $F: A \rightarrow B$ oznacza, że funkcja F przyporządkowuje wartościom ze zbioru A wartości należące do zbioru B .

⁵ Równanie (1) można zapisać także wzorem $a(k) = a_M \cdot (1 - e^{-k})$, gdzie $a_M > 0$. Wówczas przy nakładach kapitału na pracującego k rosnących od 0 do $+\infty$ technologia a rosnę od 0 do a_M . Ta zmienna jednak nie jest bezpośrednio mierzalna, więc zawsze można dobrać jednostki, w których jest ona wyrażona w ten sposób, aby $a_M = 1$. Przyjęcie założenia, że $\forall k \geq 0 \quad a(k) \in [0, 1)$, ma tę przewagę nad założeniem, że $a(k) \in [0, a_M)$, ponieważ jeśli w długim okresie $k \rightarrow \bar{k}$, to w pierwszym ze wspomnianych przypadków $a \rightarrow \bar{a} = a(\bar{k}) \in [0, 1)$, a w drugim przypadku mamy $a \rightarrow \bar{a} = a(\bar{k}) \in [0, a_M)$. Dlatego przy $a(k) \in [0, 1)$ wielkość \bar{a} wynosząca np. 0,7 oznacza, że długookresowa technologia osiąga 70% maksymalnej – możliwej do uzyskania – wartości tej zmiennej. Natomiast w przypadku, gdy $a(k) \in [0, a_M)$, długookresowa technologia byłaby równa $0,7a_M$ i należałoby tę wartość odnieść do a_M .

Z powyższej zależności wynika, że:

- z reguły de l'Hôpitala mamy

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \varepsilon(k) = \alpha + \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{k}{e^k - 1} = \alpha + \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^k} = \alpha + 1;$$

- pochodną $\varepsilon'(k)$ opisuje wzór

$$\varepsilon'(k) = \frac{(1-k)e^k - 1}{(e^k - 1)^2},$$

co powoduje, że $\text{sgn } \varepsilon'(k) = \text{sgn } \omega(k)$, gdzie

$$\omega(k) = (1-k)e^k - 1.$$

Funkcja $\omega(k)$ charakteryzuje się następującymi własnościami:

$$\omega(0) = 0 \wedge (\forall k > 0 \quad \omega'(k) = -ke^k < 0).$$

Wynika z tego, że dla każdego $k > 0$ mamy $\omega(k) < 0 \wedge \varepsilon'(k) < 0$;

- wykorzystawszy ponownie regułę de l'Hôpitala, otrzymujemy

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k) = \alpha + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{e^k - 1} = \alpha + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^k} = \alpha.$$

Z powyższych własności funkcji elastyczności $\varepsilon(k)$ wynika, że jeśli zasób kapitału na pracującego k rośnie od 0 do $+\infty$, to elastyczność ε wydajności pracy y względem nakładów kapitału na pracującego k spada od $1 + \alpha$ do α . Dlatego parametr α w funkcji wydajności pracy (4) możemy nazywać quasielastycznością (y względem k) rozumianą w ten sposób, że

$$k \rightarrow +\infty \implies \varepsilon = f'(k) \cdot \frac{k}{f(k)} \rightarrow \alpha.$$

Funkcję produktywności kapitału $p(k) = \frac{y}{k} = \frac{f(k)}{k}$ określa związek

$$p(k) = (1 - e^{-k})k^{\alpha-1} = \frac{1 - e^{-k}}{k^{1-\alpha}}. \quad (5)$$

Funkcja (5) charakteryzuje się następującymi własnościami:

- badamy ją dla $k > 0$ i wówczas $p: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$;
- jej granice w 0^+ i $+\infty$ równe są 0, ponieważ z reguły de l'Hôpitala wynika, że po pierwsze

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} p(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-k}}{k^{1-\alpha}} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{e^{-k}}{(1-\alpha)k^{-\alpha}} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{e^{-k} k^\alpha}{1-\alpha} = 0,$$

a po drugie

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-k}}{k^{1-\alpha}} = 0;$$

- znak pochodnej funkcji produktywności kapitału $p(k) = \frac{f(k)}{k}$ jest taki sam jak pochodnej funkcji

$$q(k) = \ln p(k) = \ln(1 - e^{-k}) - (1-\alpha) \ln k.$$

Pochodną funkcji $q(k)$ określa związek

$$q'(k) = \frac{e^{-k}}{1 - e^{-k}} - \frac{1-\alpha}{k} = \frac{1}{e^k - 1} - \frac{1-\alpha}{k} = \frac{k - (1-\alpha)(e^k - 1)}{k(e^k - 1)}$$

lub

$$q'(k) = \frac{r(k)}{k(e^k - 1)},$$

gdzie $r(k) = k - (1-\alpha)(e^k - 1) \wedge \operatorname{sgn} r(k) = \operatorname{sgn} q'(k)$. Ponieważ $r(0) = 0$, z tego, że $r'(k) = 1 - (1-\alpha)e^k$, wynika, że jeśli k jest mniejsze (większe) od $-\ln(1-\alpha)$, to pochodna $r'(k)$ jest dodatnia (odpowiednio: ujemna), więc w punkcie $k = -\ln(1-\alpha) > 0$ funkcja ma maksimum wynoszące $r_M > 0$. Ponadto $\lim_{k \rightarrow +\infty} r(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (k - (1-\alpha)(e^k - 1)) = -\infty$, zatem (na mocy własności Darboux funkcji ciągłej) istnieje dokładnie jeden punkt k^* większy od $-\ln(1-\alpha) > 0$, taki że w przedziale $(0, k^*)$ wartości funkcji $r(k)$ i pochodnej $q'(k)$ są dodatnie, a w przedziale $(k^*, +\infty)$ – ujemne.

Z powyższych własności funkcji produktywności kapitału $p(k)$ wynika również, że w przedziale $(0, k^*)$ wartości tej funkcji rosną od 0 do $p_M = p(k^*) > 0$, a w przedziale $(0, k^*)$ – spadają.

Wielkość k^* , przy której produktywność kapitału jest maksymalna, to rozwiązanie równania $u(k) = 0$, gdzie $u(k) = k - (1-\alpha)(e^k - 1)$. Wynika z tego, że k^* jest funkcją uwikłaną quasielastyczności α postaci $k^* = k^*(\alpha)$. Pochodną tej funkcji określa

związek $\frac{dk^*}{d\alpha} = -\frac{\partial u/\partial \alpha}{\partial u/\partial k} = \frac{e^k - 1}{(1-\alpha)e^k - 1}$. Pochodna $\frac{dk^*}{d\alpha}$ jest dodatnia, ponieważ po pierwsze $\forall k > 0$ ($e^k > 1 \Rightarrow e^k - 1 > 0$), a po drugie punkt k^* znajduje się na prawo od punktu $k = -\ln(1-\alpha) = \ln \frac{1}{1-\alpha}$, co powoduje, że w jego otoczeniu $k > \ln \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow e^k > \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow (1-\alpha)e^k - 1 > 0$.

Wybrane przybliżone wartości k^* (przy różnych quasielastycznościach α) oraz odpowiadające im produktywności kapitału $p(k^*)$ zestawiono w tabl. 1.

Tabl. 1. Przybliżenia k^* i $p_M = p(k^*)$ odpowiadające wybranym quasielastycznościom α

α	k^*	$p_M = p(k^*)$
0,05	0,1017	0,8481
0,10	0,2071	0,7717
0,15	0,3167	0,7213
0,20	0,4308	0,6865
0,25	0,5502	0,6624
0,30	0,6755	0,6463
$\frac{1}{3}$	0,7627	0,6392
0,35	0,8075	0,6366
0,40	0,9474	0,6324
0,45	1,0965	0,6331
0,50	1,2564	0,6382
0,55	1,4295	0,6476
0,60	1,6188	0,6613
$\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$	1,7457	0,6720
0,65	1,8284	0,6795
$\frac{2}{3}$	1,9038	0,6866
$\frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0,6826$	1,9789	0,6939
0,70	2,0646	0,7025
0,75	2,3367	0,7306
$\frac{\ln 3}{\ln 4} \approx 0,7925$	2,6075	0,7592
0,80	2,6604	0,7648
0,85	3,0649	0,8059
0,90	3,6150	0,8557
0,95	4,5139	0,9173

Źródło: obliczenia własne.

4. Stabilność punktów stacjonarnych

Po wstawieniu funkcji wydajności pracy (4) do równania różniczkowego (3) otrzymujemy uogólnienie równania Solowa dane wzorem

$$\dot{k}(t) = s(1 - e^{-k(t)})k^\alpha(t) - \mu k(t). \quad (6)$$

Równanie różniczkowe (6) nie ma całki ani w zbiorze funkcji elementarnych lub ich złożań – z wyjątkiem całki trywialnej $k(t) = 0$, ani wśród funkcji specjalnych Gaussa i Eulera. Ponadto, po uwzględnieniu funkcji wydajności pracy (4), możemy je zapisać wzorem

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - \mu k(t),$$

z którego wynika, że

$$\left(\dot{k} > 0 \Leftrightarrow p(k) > \frac{\mu}{s}\right) \wedge \left(\dot{k} = 0 \Leftrightarrow p(k) = \frac{\mu}{s}\right) \wedge \left(\dot{k} < 0 \Leftrightarrow p(k) < \frac{\mu}{s}\right), \quad (7)$$

gdzie $p(k)$ oznacza badaną uprzednio funkcję produktywności kapitału (5). Podobnie jak w oryginalnym modelu Solowa zależność (7) implikuje, że jeśli produktywność kapitału $p(k)$ będzie większa (mniejsza) od ilorazu $\frac{\mu}{s}$, to przyrosty kapitału na pracującego \dot{k} będą dodatnie (ujemne), a przy $p(k) = \frac{\mu}{s}$ równanie różniczkowe (6) będzie miało nietrywialny punkt stacjonarny.

Ze związku (7) i własności funkcji produktywności kapitału wynika, że liczba nietrywialnych punktów stacjonarnych równania różniczkowego (7) jest zależna od relacji, jaka kształtuje się pomiędzy maksymalną (możliwą do osiągnięcia) produktywnością kapitału p_M a ilorazem $\frac{\mu}{s}$. Wynika to z tego, że:

- jeśli $p_M < \frac{\mu}{s}$, to badane równanie różniczkowe nie ma nietrywialnych punktów stacjonarnych, ponieważ wówczas dla dowolnego $k > 0$ mamy $p(k) \leq p_M < \frac{\mu}{s}$;
- w przypadku, gdy $p_M = \frac{\mu}{s}$, równanie ma nietrywialny punkt stacjonarny \bar{k} pokrywający się z punktem k^* , w którym funkcja produktywności kapitału osiąga maksimum;
- jeśli zaś $p_M > \frac{\mu}{s}$, to z własności Darboux funkcji ciągłej wynika, że istnieją dwa nietrywialne punkty stacjonarne równania różniczkowego (6). Pierwszy z tych punktów (\bar{k}_1) należy do przedziału $(0, k^*)$, a drugi (\bar{k}_2) znajduje się w przedziale $(k^*, +\infty)$.

W pierwszym z wymienionych wyżej przypadków – czyli gdy $p_M < \frac{\mu}{s}$ – przy dowolnej dodatniej wartości kapitału na pracującego przyrosty tego kapitału są ujemne. Dlatego dla dowolnej wyjściowej wartości $k(0) > 0$ otrzymujemy⁶

$$t \rightarrow +\infty \implies (k(t) \rightarrow 0 \wedge y(t) \rightarrow 0 \wedge a(t) \rightarrow 0),$$

czyli kapitał na pracującego k , wydajność pracy y i technologia są w długim okresie zbieżne do 0.

⁶ Wartość zmiennej x , która kształtuje się przy $t \rightarrow +\infty$, jest utożsamiana z jej wartością długookresową.

Jeśli zaś $p_M = \frac{\mu}{s}$, to po pierwsze w punkcie $\bar{k} = k^*$ mamy $\dot{k} = 0$, a po drugie dla dowolnych $k \in (0, \bar{k}) \cup (\bar{k}, +\infty)$ przyrosty kapitału na pracującego są ujemne. W związku z tym:

- jeśli wyjściowy zasób kapitału na pracującego $k(0) \in (0, \bar{k})$, to

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow (k(t) \rightarrow 0 \wedge y(t) \rightarrow 0 \wedge a(t) \rightarrow 0),$$

więc mamy równowagę długookresową jak poprzednio;

- przy $k(0) = \bar{k}$ w każdym momencie $t > 0$ kapitał na pracującego jest równy \bar{k} , więc otrzymujemy⁷

$$\forall t \geq 0 \quad y(t) = f(\bar{k}) \wedge a(t) = a(\bar{k});$$

- w przypadku, gdy $k(0) \in (\bar{k}, +\infty)$, mamy $\dot{k}(t) < 0 \wedge k(t) > 0$, a z tego wynika, że

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow (k(t) \rightarrow \bar{k} \wedge y(t) \rightarrow f(\bar{k}) \wedge a(t) \rightarrow a(\bar{k})).$$

Analizując równanie różniczkowe (6) przy $p_M > \frac{\mu}{s}$, stwierdzamy, że

$$k \in (0, \bar{k}_1) \cup (\bar{k}_2, +\infty) \Rightarrow \dot{k} < 0,$$

$$(k = \bar{k}_1 \vee k = \bar{k}_2) \Rightarrow \dot{k} = 0$$

oraz

$$k \in (\bar{k}_1, \bar{k}_2) \Rightarrow \dot{k} > 0.$$

Wynikają z tego następujące wnioski:

- jeśli wyjściowy kapitał na pracującego $k(0)$ należy do przedziału $(0, \bar{k}_1)$, to

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow (k(t) \rightarrow 0 \wedge y(t) \rightarrow 0 \wedge a(t) \rightarrow 0);$$

- w przypadku, gdy $k(0) = \bar{k}_1$ również w każdym następnym momencie t , wartości rozważanego tu zasobu, czyli $k(t)$, wynoszą \bar{k}_1 , co powoduje, że wówczas

$$\forall t \geq 0 \quad y(t) = f(\bar{k}_1) \wedge a(t) = a(\bar{k}_1);$$

⁷ Rzecz jasna, skoro $f'(k) > 0$ i $a'(k) > 0$, to długookresowe wartości $f(\bar{k})$, $f(\bar{k}_1)$, $f(\bar{k}_2)$, $a(\bar{k})$, $a(\bar{k}_1)$ i $a(\bar{k}_2)$ będą tym wyższe, im wyższe będą wartości odpowiednio \bar{k} , \bar{k}_1 i \bar{k}_2 .

- jeśli $k(0) \in (\bar{k}_1, \bar{k}_2)$, to $\dot{k} > 0$, stąd wnioskujemy, że

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \left(k(t) \rightarrow \bar{k}_2 \wedge y(t) \rightarrow f(\bar{k}_2) \wedge a(t) \rightarrow a(\bar{k}_2) \right);$$

- przy $k(0) = \bar{k}_2$ mamy $\dot{k} = 0$, zatem

$$\forall t \geq 0 \quad k(t) = \bar{k}_2 \wedge y(t) = f(\bar{k}_2) \wedge a(t) = a(\bar{k}_2);$$

- przy $k(0) \in (\bar{k}_2, +\infty)$ przyrosty kapitału na pracującego są ponownie ujemne, a z tego wynika, że

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \left(k(t) \rightarrow \bar{k}_2 \wedge y(t) \rightarrow f(\bar{k}_2) \wedge a(t) \rightarrow a(\bar{k}_2) \right);$$

- zauważmy też, że punkty stacjonarne \bar{k}_1 i \bar{k}_2 są rozwiązaniami równania

$$v(k) = 0,$$

gdzie

$$v(k) = p(k) - \frac{\mu}{s},$$

przy czym punkt \bar{k}_1 jest rozwiązaniem owego równania w przedziale, w którym pochodna $p'(k)$ jest dodatnia, a punkt \bar{k}_2 – w przedziale, w którym jest ona ujemna. Dlatego

$$\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \mu} = - \frac{\partial v / \partial \mu}{\partial v / \partial k} = \frac{1}{sp'(k)} > 0 \wedge \frac{\partial \bar{k}_1}{\partial s} = - \frac{\partial v / \partial s}{\partial v / \partial k} = - \frac{\mu}{s^2 p'(k)} < 0$$

oraz

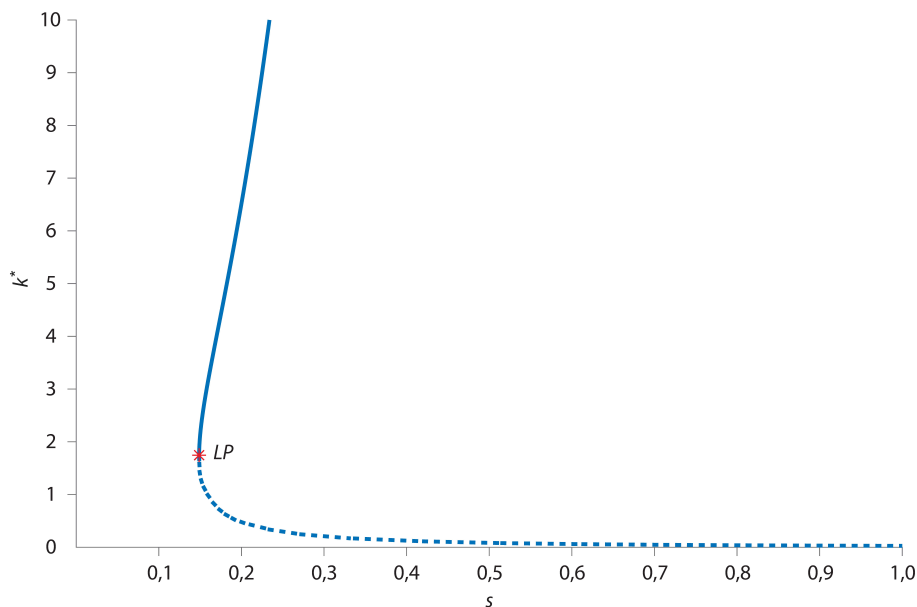
$$\frac{\partial \bar{k}_2}{\partial \mu} = - \frac{\partial v / \partial \mu}{\partial v / \partial k} = \frac{1}{sp'(k)} < 0 \wedge \frac{\partial \bar{k}_2}{\partial s} = - \frac{\partial v / \partial s}{\partial v / \partial k} = - \frac{\mu}{s^2 p'(k)} > 0.$$

Oznacza to, że im wyższa stopa ubytku kapitału na pracującego μ , tym wyższa wartość \bar{k}_1 , niższa \bar{k}_2 i tym samym mniejsza rozpiętość przedziału (\bar{k}_1, \bar{k}_2) , w którym $\dot{k} > 0$. Jeśli zaś rośnie stopa oszczędności/inwestycji s , to zasób \bar{k}_1 spada, zasób \bar{k}_2 rośnie, a rozpiętość przedziału (\bar{k}_1, \bar{k}_2) się zwiększa.

Na wyk. 1 został przedstawiony diagram bifurkacyjny (Dhooge i in., 2003) dla modelu (6). Przy wartościach parametrów $\mu = 0,1$ i $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ bifurkacja typu siodło–węzeł

zachodzi dla $s = 0,1488$. Dla wartości s mniejszych niż $0,1488$ nie istnieje żaden punkt stacjonarny oprócz trywialnego punktu stacjonarnego. Gdy s jest większe niż $0,1488$, pojawiają się dwa punkty stacjonarne; stabilne leżą na linii ciągłej, a niestabilne – na przerywanej.

Wykr. 1. Diagram bifurkacyjny dla punktów stacjonarnych k^* modelu (6) względem stopy oszczędności/inwestycji (s)



Uwaga. Linia ciągła – punkty stabilne, linia przerywana – punkty niestabilne, LP – punkt bifurkacyjny typu siodło-węzeł.

Źródło: obliczenia własne.

Porównajmy również wartości funkcji produktywności kapitału $p(k)$, opisanej równaniem (5), z wartościami funkcji produktywności kapitału $p_S(k)$, która występuje w modelu Solowa, z funkcją produkcji Cobba-Douglasa o łącznej produktywności czynników produkcji $a = 1$, czyli z funkcją produktywności kapitału daną wzorem: $p_S(k) = k^{\alpha-1}$. Przy ilorazach badanych produktywności kapitału $\rho(k) = \frac{p_S(k)}{p(k)}$ otrzymujemy⁸

$$\rho(k) = \frac{k^{\alpha-1}}{(1-e^{-k})k^{\alpha-1}},$$

⁸ Ilorazy wydajności pracy w modelu Solowa $f_S(k) = k^\alpha$ i w badanym tu modelu $f(k) = (1-e^{-k})k^\alpha$ także są równe rozważanym tu wartościom funkcji $\rho(k)$.

a stąd

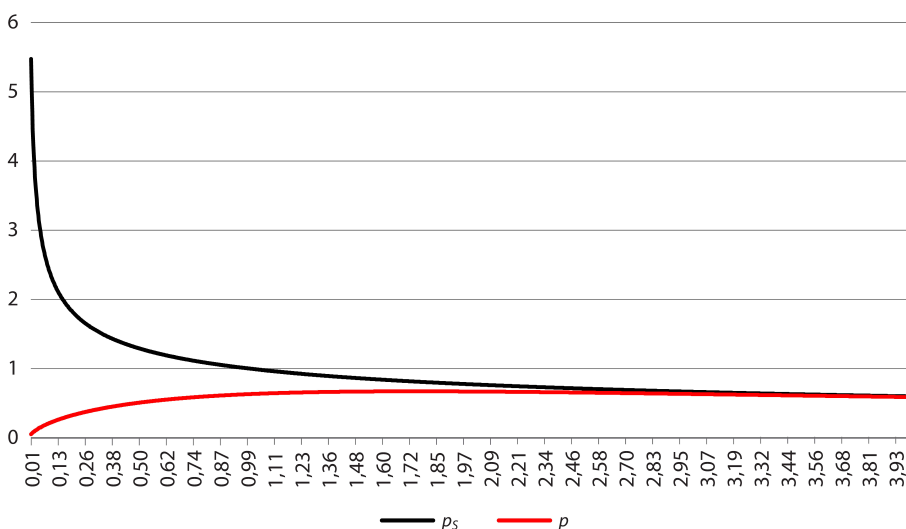
$$\rho(k) = \frac{e^k}{e^k - 1}. \quad (8)$$

Ze związku (8) wynika, że:

- $k \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(k) \rightarrow +\infty$;
- $\forall k > 0 \left(\rho'(k) = -\frac{e^k}{(e^k - 1)^2} < 0 \wedge \rho''(k) = -\frac{e^k(e^k - 1) - 2e^{2k}}{(e^k - 1)^3} = \frac{e^k(e^k + 1)}{(e^k - 1)^3} > 0 \right)$;
- $k \rightarrow +\infty \Rightarrow \rho(k) \rightarrow 1$.

Jeśli więc nakłady kapitału na pracującego k rosną od 0 do $+\infty$, to ilorazy $\rho(k)$ produktywności kapitału spadają coraz wolniej od $+\infty$ do 1. Przykładowe krzywe produktywności kapitału w modelu Solowa i w badanym modelu zilustrowano na wyk. 2, przy wartości parametru $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$, a ich kształt dla dowolnego $\alpha \in (0, 1)$ jest bardzo zbliżony do zaprezentowanego.

Wykr. 2. Krzywe produktywności kapitału w modelu Solowa (p_s) i analizowanym modelu (p) przy $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$



Źródło: obliczenia własne.

Z własności funkcji $\rho(k)$ i wyk. 2 można wyciągnąć wniosek, że jeśli badany model ma dwa nietrywialne punkty stacjonarne (czyli gdy $p_M > \frac{\mu}{s}$), to punkt stacjonarny $\bar{k}_2 < \bar{k}_S$, gdzie $\bar{k}_S = \left(\frac{s}{\mu}\right)^{1/(1-\alpha)}$ oznacza długookresowy kapitał na pracującego w równowadze modelu Solowa z funkcją produkcji Cobb-Douglasa o $\alpha = 1$.

Co więcej, zarówno w punkcie \bar{k}_2 w analizowanym modelu, jak i w punkcie długo-
okresowej równowagi Solowa \bar{k}_S musi zachodzić równość $p(k) = \frac{\mu}{s}$, więc jeśli stopa
oszczędności/inwestycji s rośnie, to po pierwsze punkty stacjonarne \bar{k}_2 i \bar{k}_S przesu-
wają się w prawo, a po drugie iloraz $\frac{\bar{k}_S}{\bar{k}_2}$ zbliża się do 1.

Prowadzone rozważania teoretyczne zilustrujemy prostym przykładem liczbowym.
Załóżmy, że stopa ubytku kapitału na pracującego μ wynosi 10%. Przyjmujemy, że
wartości parametru α wynoszą kolejno $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$, $\frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0,6826$ lub $\frac{\ln 3}{\ln 4} \approx 0,7925$.
Bierzemy α , będące ilorazami $\frac{\ln A}{\ln B}$ (przy czym $A, B > 0$), z tego względu, że gdyby
w gospodarce proces produkcyjny opisywała funkcja produkcji Cobba-Dougłasa
o TFP równej 1, czyli funkcja $Y = K^\alpha L^{1-\alpha} \Rightarrow y = k^\alpha$, i gdyby stosunek kapitału na
pracującego $\frac{k_I}{k_{II}}$ w dwóch gospodarkach wynosił B , to relację wydajności pracy $\frac{y_I}{y_{II}}$
w tych gospodarkach określałoby równanie⁹ $\frac{y_I}{y_{II}} = \left(\frac{k_I}{k_{II}}\right)^{\ln A / \ln B} = B^{\ln A / \ln B} = A$. Ozna-
cza to, że w tych warunkach $\left(\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3} \wedge \frac{k_I}{k_{II}} = 3\right) \Rightarrow \frac{y_I}{y_{II}} = 2$, $\left(\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 5} \wedge \frac{k_I}{k_{II}} = 5\right) \Rightarrow$
 $\frac{y_I}{y_{II}} = 3$ oraz $\left(\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 4} \wedge \frac{k_I}{k_{II}} = 4\right) \Rightarrow \frac{y_I}{y_{II}} = 3$.

Z oszacowań w tabl. 1 wynika, że przy wartości parametru $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ zasób k^* jest równy
ok. 1,7457, a $p_M = p(k^*) \approx 0,6720$, jeśli $\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 5}$, to $k^* \approx 1,9789 \wedge p_M = p(k^*) \approx$
 $0,6939$. W przypadku $\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 4}$ otrzymujemy $k^* \approx 2,6075 \wedge p_M = p(k^*) \approx 0,7592$.
Przy tych wartościach parametrów α i μ dochodzimy do następujących wniosków:

- jeśli stopa oszczędności/inwestycji w gospodarce będzie niższa od $s^* = \frac{\mu}{p_M} = \frac{1}{10p_M}$,
to w długim okresie $k(t), y(t), a(t) \rightarrow 0$. W badanych przypadkach wartości s^*
są równe ok. 14,88% przy $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, ok. 14,41%, jeśli $\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 5}$ oraz ok. 13,17%
dla $\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 4}$;
- w przypadku, gdy stopa oszczędności/inwestycji s równa jest s^* (odpowiadają-
cemu zadanym wartościom quasielastyczności α), to $(k(0) < \bar{k} = k^* \wedge t \rightarrow +\infty) \Rightarrow$
 $k(t), y(t), a(t) \rightarrow 0$, $k(0) = \bar{k} = k^* \Rightarrow \forall t > 0 (k(t) = \bar{k} \wedge y(t) = f(\bar{k}) \wedge a(t) = a(\bar{k}))$
lub $(k(0) > \bar{k} = k^* \wedge t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (k(t) \rightarrow \bar{k} \wedge y(t) \rightarrow f(\bar{k}) \wedge a(t) \rightarrow a(\bar{k}))$.

Wartości \bar{k} , $f(\bar{k})$ i $a(\bar{k})$, towarzyszące badanym wartościom quasielastyczności,
przedstawiono w tabl. 2.

⁹ Rzecz jasna przy funkcji wydajności pracy (4) implikacja $\left(\alpha = \frac{\ln A}{\ln B} \wedge \frac{k_I}{k_{II}} = B\right) \Rightarrow \frac{y_I}{y_{II}} = A$ nie zachodzi, ponie-
waż wówczas mamy $\left(\alpha = \frac{\ln A}{\ln B} \wedge \frac{k_I}{k_{II}} = B\right) \Rightarrow \frac{y_I}{y_{II}} = \frac{1 - e^{-Bk_{II}}}{1 - e^{-k_{II}}} A$.

Tabl. 2. Wartości \bar{k} , $f(\bar{k})$ i $a(\bar{k})$ odpowiadające wybranym quasielastycznościom α

α	$\bar{k} = k^*$	$f(\bar{k})$	$a(\bar{k})$
$\frac{\ln 2}{\ln 3}$	1,7457	1,1732	0,8255
$\frac{\ln 3}{\ln 5}$	1,9789	1,3732	0,8618
$\frac{\ln 3}{\ln 4}$	2,6075	1,9797	0,9263

Źródło: obliczenia własne.

- jeśli zaś $s > s^*$, to przy $k(0) > 0$ może wystąpić jeden z następujących pięciu przypadków:

$$(k(0) \in (0, \bar{k}_1) \wedge t \rightarrow +\infty) \Rightarrow k(t), y(t), a(t) \rightarrow 0,$$

$$k(0) = \bar{k}_1 \Rightarrow \forall t > 0 \left(k(t) = \bar{k}_1 \wedge y(t) = f(\bar{k}_1) \wedge a(t) = a(\bar{k}_1) \right),$$

$$(k(0) \in (\bar{k}_1, \bar{k}_2) \wedge t \rightarrow +\infty) \Rightarrow \left(k(t) \rightarrow (\bar{k}_2)^- \wedge y(t) \rightarrow \left(f(\bar{k}_2) \right)^- \wedge a(t) \rightarrow \left(a(\bar{k}_2) \right)^- \right),$$

$$k(0) = \bar{k}_2 \Rightarrow \forall t > 0 \left(k(t) = \bar{k}_2 \wedge y(t) = f(\bar{k}_2) \wedge a(t) = a(\bar{k}_2) \right)$$

lub

$$(k(0) > \bar{k}_2 \wedge t \rightarrow +\infty) \Rightarrow \left(k(t) \rightarrow (\bar{k}_2)^+ \wedge y(t) \rightarrow \left(f(\bar{k}_2) \right)^+ \wedge a(t) \rightarrow \left(a(\bar{k}_2) \right)^+ \right).$$

Wartości \bar{k}_1 , $f(\bar{k}_1)$, $a(\bar{k}_1)$, \bar{k}_2 , $f(\bar{k}_2)$ i $a(\bar{k}_2)$, opisujące stany stabilnej lub niestabilnej równowagi długookresowej tak zmodyfikowanego modelu wzrostu Solowa, przy badanych wartościach quasielastyczności α oraz stopie oszczędności/inwestycji s równej (kolejno) 15%, 17,5%, 20%, 22,5%, 25% $> s^*$, zestawiono w tabl. 3. Podano również wartości kapitału na pracującego \bar{k}_s i wydajności pracy $\bar{y}_s = (\bar{k}_s)^\alpha$ w długookresowej równowadze Solowa przy badanych kombinacjach (α, s, μ) , równe $\bar{k}_s = \left(\frac{s}{\mu}\right)^{1/(1-\alpha)}$ i $\bar{y}_s = \left(\frac{s}{\mu}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$.

Tabl. 3. Wartości $\bar{k}_1, f(\bar{k}_1), a(\bar{k}_1), \bar{k}_2, f(\bar{k}_2), a(\bar{k}_2)$ oraz \bar{k}_s i \bar{y}_s przy wybranych kombinacjach parametrów (α, s)

s	\bar{k}_1	$f(\bar{k}_1)$	$a(\bar{k}_1)$	\bar{k}_2	$f(\bar{k}_2)$	$a(\bar{k}_2)$	\bar{k}_s	\bar{y}_s
$\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$								
0,150	1,4312	0,9541	0,7610	2,1271	1,4181	0,8808	3 ^a	2 ^a
0,175	0,6894	0,3939	0,4981	4,4062	2,5178	0,9878	4,5553	2,6030
0,200	0,4804	0,2402	0,3815	6,5148	3,2574	0,9985	6,5410	3,2705
0,225	0,3665	0,1629	0,3068	8,9970	3,9987	0,9999	9 ^a	4 ^a
0,250	0,2937	0,1175	0,2545	11,9733	4,7893	1,0000	11,9736	4,7894
$\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 5}$								
0,150	1,2704	0,8469	0,7193	3,1049	2,0699	0,9552	3,5876	2,3917
0,175	0,7262	0,4150	0,5163	5,7739	3,2994	0,9969	5,8308	3,3319
0,200	0,5223	0,2611	0,4068	8,8767	4,4384	0,9999	8,8806	4,4403
0,225	0,4064	0,1806	0,3340	12,8708	5,7203	1,0000	12,8709	5,7204
0,250	0,3306	0,1322	0,2815	17,9380	7,1752	1,0000	17,9380	7,1752
$\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 4}$								
0,150	1,1653	0,7769	0,6882	7,0258	4,6839	0,9991	7,0560	4,7040
0,175	0,7836	0,4478	0,5432	14,8307	8,4747	1,0000	14,8307	8,4747
0,200	0,5962	0,2981	0,4491	28,2238	14,1119	1,0000	28,2238	14,1119
0,225	0,4810	0,2138	0,3818	49,7865	22,1273	1,0000	49,7865	22,1273
0,250	0,4021	0,1608	0,3311	82,7199	33,0880	1,0000	82,7199	33,0880

a W tych przypadkach uzyskano wielkości będące liczbami naturalnymi.

Uwaga. Szarym tłem zaznaczono wielkości z oryginalnego modelu Solowa. Wielkości w tabl. 3 podawane są z dokładnością do 4 cyfr po przecinku, dlatego zapis 1,0000 oznacza liczbę bardzo zbliżoną do 1.

Źródło: obliczenia własne.

Aby zilustrować przykładowe trajektorie kapitału na pracującego, technologii i wydajności pracy w czasie dyskretnym, zastępujemy układ równań (1)–(3) następującym układem dynamicznym (dla $t = 0, 1, \dots$):

$$\begin{cases} a_t = 1 - e^{-k_t} \\ y_t = a_t k_t^\alpha \\ k_t = s y_{t-1} + (1 - \mu) k_{t-1} \end{cases} \quad (9)$$

Przy $t \rightarrow +\infty$ układ (9) zmierza do tego samego punktu stacjonarnego co model teoretyczny (1)–(3), zatem w otoczeniu tego punktu rozwiązania są równoważne.

Korzystając z układu dynamicznego (9), wyznaczamy trajektorie wspomnianych zmiennych makroekonomicznych w trzech hipotetycznych gospodarkach: A, B i C. W symulacjach numerycznych bierzemy quasielastyczność¹⁰ $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ i stopę ubytku kapitału na pracującego $\mu = 0,1$. Jeśli zaś $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, to maksymalna produktywność kapitału p_M występuje przy $k^* \approx 1,7457$ i wynosi ok. 0,6720. Na wykresach 3–5 zilustrowano te trajektorie, przy założeniu że w każdej gospodarce stopa oszczędności/inwestycji s wynosi odpowiednio 0,12, $s = \frac{\mu}{p_M} \approx 0,1488$ i 0,16. Wówczas

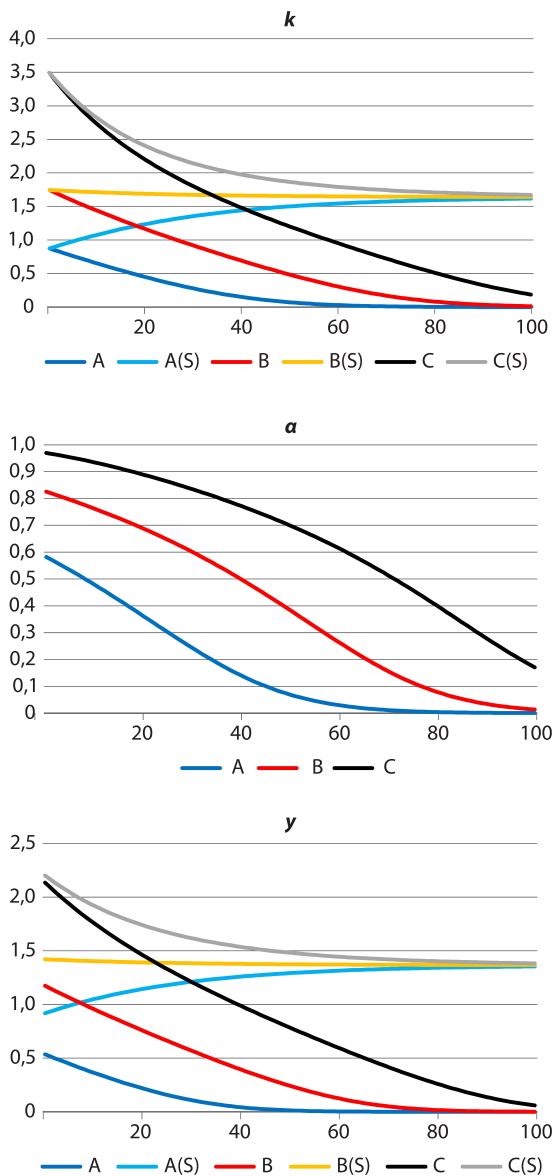
$$\left(s = 0,12 \Rightarrow p_M < \frac{\mu}{s} \right) \wedge \left(s = 0,16 \Rightarrow p_M > \frac{\mu}{s} \right).$$

Ponadto w każdym z badanych przypadków założyliśmy, że w gospodarce A wyjściowy kapitał na pracującego $k_0 > 0$ wynosi $\frac{k^*}{2}$, w gospodarce B wynosi $k_0 = k^*$, a w C wynosi $k_0 = 2k^*$. Wówczas (przy badanej quasielastyczności α) wyjściowy zasób kapitału na pracującego w gospodarce A jest niższy od \bar{k}_1 , w B spełniona jest nierówność $\bar{k}_1 < k_0 < \bar{k}_2$, a w gospodarce C jest to $k_0 > \bar{k}_2$.

Ponadto na wykresach 3–5 zilustrowano trajektorie kapitału na pracującego k i wydajności pracy y w gospodarkach A, B i C w analogicznym modelu Solowa (pominięto trajektorie technologii a , ponieważ w tym modelu w każdym okresie t $a_t = 1$). Trajektorie wspomnianych zmiennych w modelu Solowa są oznaczone odpowiednio jako A(S), B(S) i C(S).

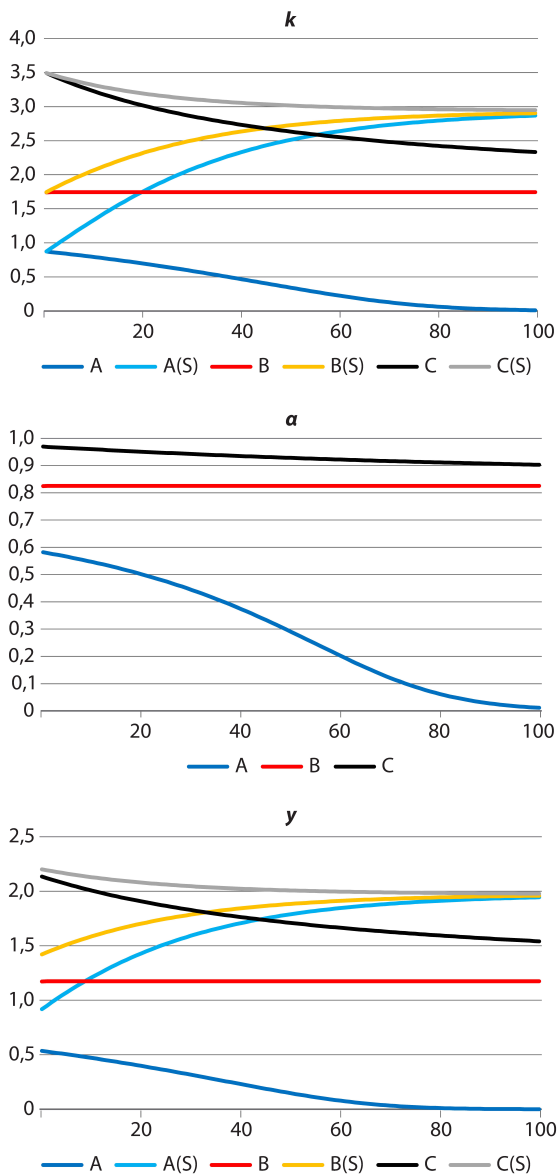
¹⁰ Prezentowane symulacje numeryczne mają jedynie zilustrować wnioski płynące z prowadzonych wcześniej analiz teoretycznych, dlatego wybór quasielastyczności $\alpha \in (0, 1)$ nie rzutuje na kształt otrzymanych trajektorii, a wpływa jedynie na ich położenie. Bierzemy zatem *ad hoc* $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. W znanych z literatury szacunkach i kalibracjach parametrów funkcji produkcji Cobba-Douglasa dla różnych gospodarek (np. Dykas i in., 2023; Filipowicz, 2019; Filipowicz i in., 2017; Florczak i in., 2013; Kliber i Malaga, 2003; Matsumoto i Szidarovszky, 2025; Vollrath, 2024; Wisła i Nowosad, 2020) te elastyczności wahają się między 0,19 a $\frac{\ln 3}{\ln 5}$, co sugeruje, że trudno o precyzyjne, uniwersalne wyznaczenie wartości tego parametru. Szeroką dyskusję dotyczącą kalibracji lub estymacji elastyczności produkcji względem kapitału na pracującego a można znaleźć w pracy Welfego (2003).

Wykr. 3. Trajektorie kapitału na pracującego k , technologii a i wydajności pracy y przy $s = 0,12$



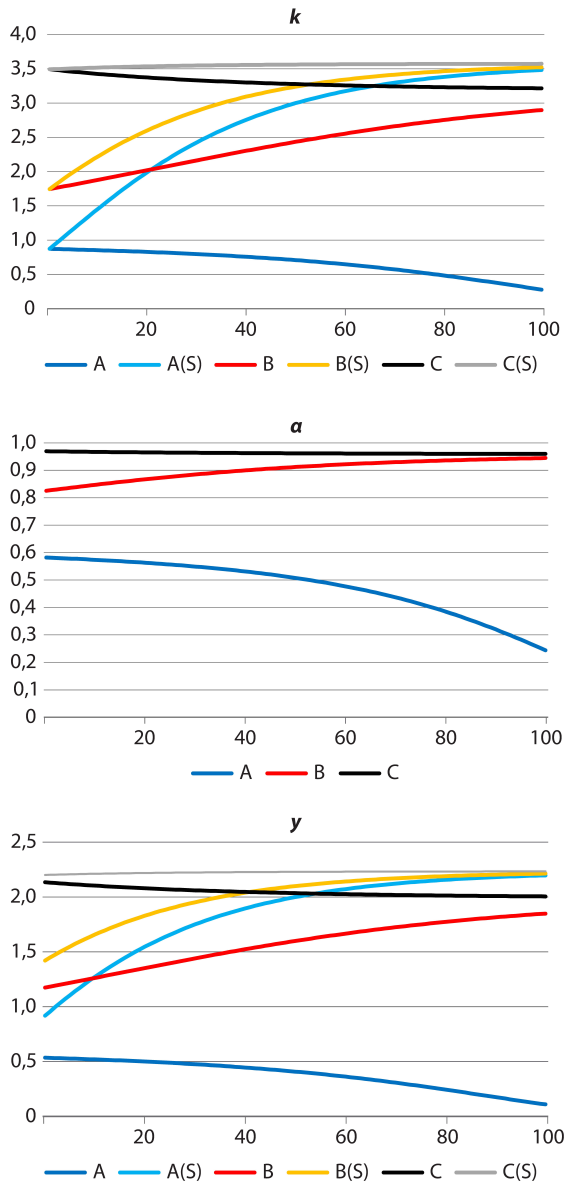
Źródło: obliczenia własne.

Wykr. 4. Trajektorie kapitału na pracującego k , technologii α i wydajności pracy y przy $s = \frac{\mu}{\rho_M}$



Źródło: obliczenia własne.

Wykr. 5. Trajektorie kapitału na pracującego k , technologii α i wydajności pracy y przy $s = 0,16$



Źródło: obliczenia własne.

Trajektorie przedstawione na wykresach 3–5 potwierdzają sformułowane wcześniej wnioski płynące z analiz stricte teoretycznych, ponieważ przy stopach oszczędności/inwestycji poniżej wyznaczonej uprzednio wielkości granicznej kapitał na pracującego, technologia i wydajność pracy zmierzają do 0, powyżej zaś – do nietrywialnego punktu stacjonarnego. Jeśli we wspomnianym okresie kapitał na pracującego wynosi $k_0 > 0$, to odpowiadający mu poziom produkcji na pracującego y_0 w modelu Solowa jest równy k_0^α , a w prezentowanym modelu

$$y_0 = (1 - e^{-k_0})k_0^\alpha < k_0^\alpha,$$

czyli w każdej badanej gospodarce poziom wydajności pracy w modelu Solowa w okresie $t = 0$ jest wyższy niż w badanym modelu wzrostu gospodarczego.

5. Podsumowanie

W pracy został przedstawiony model wzrostu, w którym zakłada się, że akumulacja kapitału na pracującego prowadzi do wzrostu poziomu technologii. Ten model może mieć więcej niż jeden nietrywialny punkt stacjonarny, przy czym jeśli istnieją dwa nietrywialne punkty stacjonarne, to pierwszy z nich wyznacza granicę ubóstwa gospodarki. Jeśli gospodarka znajdzie się w przedziale między 0 a pierwszym z punktów stacjonarnych, to w długim okresie wszystkie badane zmienne makroekonomiczne zmierzają do 0. Aby gospodarka nie wpadła w pułapkę ubóstwa, musi zatem cechować się odpowiednio wysoką stopą oszczędności/inwestycji, która przesuwą krytyczny nietrywialny punkt stacjonarny w lewo.

W odróżnieniu od oryginalnego modelu Solowa, w prezentowanym modelu wzroście gospodarczego wykazaliśmy, że poniżej pewnego poziomu stopy oszczędności/inwestycji nie istnieje żaden nietrywialny punkt stacjonarny, a powyżej tego poziomu mamy dwa nietrywialne punkty stacjonarne. Pierwszy z nich (przy niższym poziomie kapitału na pracującego) jest punktem niestabilnym, drugi zaś (cechujący się wyższą wartością tej zmiennej makroekonomicznej) – punktem stabilnym.

Zbadaliśmy również dynamikę rozwiązań modelu i przeprowadziliśmy symulacje numeryczne trajektorii kapitału na pracującego, technologii i wydajności pracy przy wybranych quasierlastycznościach (wydajności pracy względem kapitału na pracującego), stopach oszczędności/inwestycji i stopie ubytku kapitału na pracującego.

Z przeprowadzonych analiz teoretycznych i wyników prezentowanych symulacji numerycznych wynika, że im wyższa stopa oszczędności/inwestycji (przy danej kombinacji pozostałych zmiennych niezależnych w badanym modelu), tym większe prawdopodobieństwo, że tak uogólniony model Solowa ma dwa nietrywialne punkty stacjonarne. Ponadto im wyższa wartość stopy oszczędności/inwestycji (przy dwóch

nietrywialnych punktach stacjonarnych), tym większa rozpiętość przedziału pomiędzy wartościami kapitału na pracującego w nietrywialnych punktach stacjonarnych badanego modelu wzrostu. Im większa zaś rozpiętość tego przedziału, tym większe prawdopodobieństwo, że wyjściowy poziom kapitału na pracującego jest wyższy od wartości tej zmiennej w pierwszym z nietrywialnych punktów stacjonarnych. Z tego wynika, że wysokiej stopie oszczędności/inwestycji towarzyszy niskie prawdopodobieństwo, że w gospodarce charakteryzującej się pewnym kapitałem na pracującego $k(0) > 0$ wartości podstawowych zmiennych makroekonomicznych na pracującego będą w długim okresie dążyć do 0.

Bibliografia

- Aghion, P., Howitt, P. (1998). *Endogenous Growth Theory*. MIT Press.
- Allen, R. D. G. (1975). *Teoria makroekonomiczna. Ujęcie matematyczne*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- Arrow, K. J. (1962). The Economic Implications of Learning by Doing. *Review of Economic Studies*, 29(3), 155–173. <https://doi.org/10.2307/2295952>.
- Baier, S. L., Dwyer, Jr., G. P., Tamura, R. (2006). How Important are Capital and Total Factor Productivity for Economic Growth?. *Economic Inquiry*, 44(1), 23–49. <https://doi.org/10.1093/ei/cbj003>.
- Barro, R. J., Sala-i-Martin, X. (1995). *Economic Growth*. MIT Press.
- Cobb, C. W., Douglas, P. H. (1928). A theory of production. *The American Economic Review*, 18(1), 139–165. <https://www.aeaweb.org/aer/top20/18.1.139-165.pdf>.
- De Visscher, S., Eberhardt, M., Everaert, G. (2020). Estimating and testing the multicountry endogenous growth model. *Journal of International Economics*, 125, 1–32. <https://doi.org/10.1016/j.jinteco.2020.103325>.
- Deboeck, B. (2023). Prospects for long-term productivity growth. *Quarterly Report on the Euro Area*, 22(1), 31–42. https://economy-finance.ec.europa.eu/system/files/2023-05/ip201_en_chapter%20III.pdf.
- Dhooge, A., Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A. (2003). MATCONT: A MATLAB Package for Numerical Bifurcation Analysis of ODEs. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 29(2), 141–164. <https://doi.org/10.1145/779359.779362>.
- Dykas, P., Tokarski, T., Wisła, R. (2023). *The Solow Model of Economic Growth: Application to the Contemporary Macroeconomics Issues*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003323792>.
- Ferrara, M., Guerrini, L. (2009). The neoclassical model with variable population change. W: M. Jha, C. Long, N. Matorakis, C. A. Bulucea (red.), *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on Mathematical and Computational Methods in Science and Engineering* (s. 119–123). World Scientific and Engineering Academy and Society.
- Filipowicz, K. (2019). *Wpływ interakcji przestrzennych na zróżnicowanie rozwoju gospodarczego Polski*. Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

- Filipowicz, K., Grodzicki, M., Tokarski, T. (2016). Równowaga Solowa przy alternatywnych trajektoriach liczby pracujących. *Acta Universitatis Lodzianis Folia Oeconomica*, 6(326), 181–202. <https://doi.org/10.18778/0208-6018.326.12>.
- Filipowicz, K., Krawiec, A., Tokarski, T. (2024a). War and Economic Growth: An Analyses Based on Extended Solow Model. *Defence and Peace Economics*, 36(6), 825–839. <https://doi.org/10.1080/10242694.2024.2435280>.
- Filipowicz, K., Krawiec, A., Tokarski, T. (2024b). *Wykłady z teorii wzrostu gospodarczego* (t. 1). Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.
- Filipowicz, K., Syrek, R., Tokarski, T. (2017). Ścieżki wzrostu w modelu Solowa przy alternatywnych trajektoriach liczby pracujących. *Przegląd Statystyczny*, 64(1), 21–40. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0014.0759>.
- Florczak, W., Świczewska, I., Welfe, W. (2013). Modelowanie procesu produkcji w makroekonomicznym modelu W8D-2010. *Acta Universitatis Lodzianis Folia Oeconomica*, (294), 133–177. <https://dspace.uni.lodz.pl/xmlui/bitstream/handle/11089/10495/05-florczak.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- Grossman, G. M., Helpman, E. (1991). *Innovation and Growth in the Global Economy*. MIT Press.
- Heshmati, A., Rashidghalam, M. (2016). *Estimation of Technical Change and TFP Growth Based on Observable Technology Shifters* (IZA DP No. 10448). <https://docs.iza.org/dp10448.pdf>.
- Kliber, P., Malaga, K. (2003). Zbieżność ścieżek wzrostu gospodarki Polski i polskich województw w latach 1998–2000 do stabilnych stanów równowagi. *Studia Regionalne i Lokalne*, (4), 41–64. https://studreg.uw.edu.pl/dane/web_sril_files/104/2003_4_kliber_malaga.pdf.
- Lucas, Jr., R. E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22(1), 3–42. [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7).
- Malaga, K. (2013, 28–29 listopada). *Jednolita teoria wzrostu gospodarczego – stan obecny i nowe wyzwania* [referat]. IX Kongres Ekonomistów Polskich, Warszawa.
- Mankiw, N. G., Romer, D., Weil, D. N. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407–437. <https://doi.org/10.2307/2118477>.
- Matsumoto, A., Szidarovszky, F. (2025). Delay Solow model revisited. *Metroeconomica*, 76(4), 467–480. <https://doi.org/10.1111/meca.12494>.
- Nonneman, W., Vanhoudt, P. (1996). A further augmentation of the Solow model and the empirics of economic growth for OECD countries. *The Quarterly Journal of Economics*, 111(3), 943–953. <https://doi.org/10.2307/2946677>.
- Philippon, T. (2022). *Additive Growth* (NBER Working Paper Series No 29950). <https://doi.org/10.3386/w29950>.
- Plata Pérez, L., Calderón, E. (2009). A modified version of Solow-Ramsey model using Richard's growth function. *EconoQuantum*, 6(1), 65–70. <https://doi.org/10.18381/eq.v6i1.99>.
- Richards, F. J. (1959). A Flexible Growth Function for Empirical Use. *Journal of Experimental Botany*, 10(2), 290–301. <https://doi.org/10.1093/jxb/10.2.290>.
- Romer, P. M. (1986). Increasing Returns and Long-Run Growth. *Journal of Political Economy*, 94(5), 1002–1037. <https://doi.org/10.1086/261420>.
- Romer, P. M. (1990). Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, 98(5), S71–S102. <https://doi.org/10.1086/261725>.

- Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65–94. <https://doi.org/10.2307/1884513>.
- Solow, R. M. (1957). Technical change and the aggregate production function. *The Review of Economics and Statistics*, 39(3), 312–320. <https://doi.org/10.2307/1926047>.
- Solow, R. M. (2000). *Growth Theory. An Exposition* (wyd. 2). Oxford University Press.
- Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, 32(2), 334–361. <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x>.
- Ulam, S. (1958). John von Neumann 1903–1957. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64(3), 1–49. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1958-10189-5>.
- Uzawa, H. (1965). Optimal technical change in an aggregative model of economic growth. *International Economic Review*, 6(1), 18–31. <https://doi.org/10.2307/2525621>.
- Vollrath, D. (2024). The Elasticity of Aggregate Output with Respect to Capital and Labor. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 16(4), 470–504. <https://doi.org/10.1257/mac.20220215>.
- Welfe, W. (2003). Łączna produktywność czynników produkcji a postęp techniczny. *Studia Ekonomiczne*, 36–37(1–2), 94–115.
- Wisła, R., Nowosad, A. (red.). (2020). *Economic Transformation in Poland and Ukraine. National and Regional Perspectives*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003041375>.

WYDAWNICTWA GUS. KWIECIEŃ 2026

PUBLICATIONS OF STATISTICS POLAND. APRIL 2026

W ofercie wydawniczej Głównego Urzędu Statystycznego z ubiegłego miesiąca warto zwrócić uwagę na następującą publikację:

Among Statistics Poland's publications from the previous month, we would like to recommend:

Rozwój regionalny Polski – raport analityczny 2025 ***Regional development of Poland – analytical report 2025***

Szosta edycja raportu analitycznego na temat regionalnego rozwoju Polski, opracowywanego przez Główny Urząd Statystyczny na potrzeby monitorowania Krajowej Strategii Rozwoju Regionalnego (KSRR) 2030.



Język: polski (przedmowa, spis treści, ważniejsze skróty i synteza również w języku angielskim)

Language: Polish (preface, contents, main abbreviations and executive summary available also in English)

Seria: Analizy i raporty statystyczne

Series: Statistical analyses and reports

Dostępne wersje: elektroniczna

Available in: electronic form

Publikacja zawiera podsumowanie rozwoju regionów w 2024 r. Składa się z trzech działów poświęconych sytuacji społeczno-gospodarczej i przestrzennej regionów NUTS 2 (dział pierwszy), obszarów miejskich (dział drugi) i obszarów wiejskich oraz gmin zagrożonych trwałą marginalizacją (dział trzeci). Obejmuje zagadnienia m.in. zagrożeń środowiskowych, procesów demograficznych oraz uwarunkowań rozwoju kapitału ludzkiego i społecznego. Wśród analizowanych tematów znalazły się także kwestie infrastrukturalne i dotyczące potencjału administracyjnego samorządów. W przekrojach terytorialnych uwzględniono krajowe obszary strategicznej interwencji.

Publikację uzupełniają dwa załączniki: tabela ze wskaźnikami monitorującymi KSRR 2030 oraz mapy przedstawiające delimitacje przestrzenne.

W kwietniu br. ukazały się ponadto:

- „Biuletyn statystyczny” nr 3/2026;
- *Działalność przedsiębiorstw posiadających jednostki zagraniczne w 2024 r.*;
- *Informator o badaniach i opracowaniach dotyczących obszarów transgranicznych*;
- *Koniunktura gospodarcza (2000–2026) – kwiecień 2026*;
- *Koniunktura gospodarcza. Raport wojewódzki 2026 nr 3/2026*;
- *Koniunktura w gospodarstwach rolnych w 2 półroczu 2025 r. Raport wojewódzki 2025*;
- *Ludność. Stan i struktura oraz ruch naturalny w przekroju terytorialnym w 2025 r. Stan w dniu 31 grudnia*;
- *Nakłady i wyniki przemysłu w 2025 r.*;
- *Produkcja upraw rolnych i ogrodnictwa w 2025 r.*;
- *Produkcja ważniejszych wyrobów przemysłowych w marcu 2026 r.*;
- *Sytuacja społeczno-gospodarcza kraju w 1 kwartale 2026 r.*;
- *Sytuacja społeczno-gospodarcza województw Nr 4/2025*;
- „Wiadomości Statystyczne. The Polish Statistician” nr 4/2026.

Joanna Sadowy

Główny Urząd Statystyczny, Departament Analiz i Udostępniania Informacji, Polska
Statistics Poland, Analyses and Dissemination Department, Poland

Wszystkie publikacje GUS w wersji elektronicznej są dostępne na stronie publikacje.new.stat.gov.pl.
Wersje drukowane (jeśli zostały wydane) można zamawiać pod adresem: cis-sprzedaz@stat.gov.pl.
All the publications of Statistics Poland available in electronic form can be accessed at publikacje.new.stat.gov.pl/en.
Printed versions (if available) may be ordered at: cis-sprzedaz@stat.gov.pl.

DLA AUTORÓW

FOR THE AUTHORS

(for the English translation of the information given below, please visit ws.stat.gov.pl/ForAuthors)

W „Wiadomościach Statystycznych. The Polish Statistician” („WS”) zamieszczane są artykuły o charakterze naukowym poświęcone teorii i praktyce statystycznej, które prezentują wyniki oryginalnych badań teoretycznych lub analitycznych wykorzystujących metody statystyki matematycznej, opisowej bądź ekonometrii. Ukazują się również artykuły przeglądowe, recenzje publikacji naukowych oraz inne opracowania informacyjne. W czasopiśmie publikowane są prace w języku polskim i angielskim.

Od 2007 r. „WS” znajdują się na liście czasopism naukowych Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego. Zgodnie z komunikatem Ministra Nauki z dnia 5 stycznia 2024 r. w sprawie wykazu czasopism naukowych i recenzowanych materiałów z konferencji międzynarodowych „WS” otrzymały 70 punktów.

„Wiadomości Statystyczne. The Polish Statistician” są udostępniane w następujących bazach, repozytoriach, katalogach i wyszukiwarkach: Agro, BazEkon, Biblioteka Nauki, Central and Eastern European Academic Source (CEEAS), Central and Eastern European Online Library (CEEOL), Central European Journal of Social Sciences and Humanities (CEJSH), Directory of Open Access Journals (DOAJ), EBSCO Discovery Service, Emerging Sources Citation Index – Web of Science (ESCI), European Reference Index for the Humanities and Social Sciences (ERIH Plus), Exlibris Primo, Google Scholar, ICI Journals Master List, ICI World of Journals, Norwegian Register for Scientific Journals and Publishers (The Nordic List), Summon, i WorldCat.

Za publikację artykułów na łamach „WS” autorzy nie otrzymują honorariów ani nie wnoszą opłat.

1. Zgłaszanie artykułów

Prace przeznaczone do opublikowania w „WS” należy przesyłać za pośrednictwem platformy Editorial System: www.editorialsystem.com/ws.

Zgłaszany artykuł powinien być zanonimizowany, tj. pozbawiony informacji o autorze/autorach (również we właściwościach pliku), podziękowań i informacji o źródłach finansowania, a także innych informacji wskazujących na afiliację lub umożliwiających zidentyfikowanie autora. Jeżeli w pracy występują tablice, wykresy lub mapy, powinny być umieszczone w treści artykułu. Materiały graficzne, razem z danymi do nich, należy ponadto załączyć jako osobny plik / osobne pliki, najlepiej w formacie Excel. **Prosimy o niestosowanie stylów i ograniczenie formatowania do wymogów redakcyjnych.** Więcej informacji w pkt 4 *Wymogi redakcyjne*.

Razem z artykułem należy przesłać skan/zdjęcie oświadczenia o udzieleniu licencji. **Załączenie oświadczenia jest warunkiem poddania pracy ocenie wstępnej i skierowania do recenzji.**

Artykuły zgłaszane od 2022 r. do opublikowania w „WS” są udostępniane na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa – Na tych samych warunkach 4.0 (CC BY-SA 4.0), która jest dostępna na stronie <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pl>.

Autorzy mają prawo do samodzielnego umieszczenia w wybranych przez siebie repozytoriach artykułu w wersji zarówno zgłoszonej do „WS”, jak i zaakceptowanej do opublikowania oraz opublikowanej, z zastrzeżeniem wymogu niezwłocznego podania w repozytorium informacji o numerze „WS”, w którym praca się ukazała, wraz z linkiem do niej (DOI).

Więcej informacji: Zgłaszanie artykułów w zakładce Dla autorów.

2. Przebieg prac redakcyjnych

Zgłoszony artykuł jest oceniany i opracowywany w czteroetapowym procesie:

1. **Ocena wstępna**, dokonywana przez redakcję. Polega na weryfikacji: naukowego charakteru artykułu, zgodności jego tematyki z profilem czasopisma, struktury i zawartości pracy pod kątem wymogów redakcyjnych oraz oryginalności (wykrywanie programem antyplagiacyjnym treści zapożyczonych, a także wygenerowanych za pomocą narzędzi sztucznej inteligencji). Na jej podstawie formułowane są uwagi i zalecenia dla autora. Poprawiona/uzupełniona przez autora praca jest kierowana do recenzji. W przypadku negatywnej weryfikacji artykuł zostaje odrzucony, a autor otrzymuje decyzję wraz z uzasadnieniem.
2. **Ocena recenzentów**, dokonywana przez specjalistów w danej dziedzinie. Artykuł oceniają dwaj recenzenci spoza jednostki naukowej, przy której afiliowany jest autor, i spoza Zespołu Redakcyjnego „WS”; w przypadku pracy w języku angielskim co najmniej jeden recenzent jest afiliowany przy jednostce zagranicznej. W razie sprzecznych opinii dwóch recenzentów powoływany jest trzeci recenzent. Recenzenci kierują się kryteriami oryginalności i jakości opracowania zarówno w odniesieniu do treści, jak i formy artykułu.

Autor pracy, która otrzymała dwie pozytywne oceny, wprowadza poprawki zalecane przez recenzentów i przesyła do redakcji skorygowaną wersję tekstu. Jeśli pojawi się różnica zdań dotycząca zasadności proponowanych zmian, autor jest zobligowany do uzasadnienia swojego stanowiska.

3. **Ocena redakcji**, decydująca o przyjęciu pracy do publikacji. Polega m.in. na weryfikacji dokonania przez autora zmian w artykule stosownie do uwag recenzentów. Redakcja ocenia artykuł pod względem poprawności i spójności merytorycznej oraz zaleca autorowi wprowadzenie poprawek, jeśli są one konieczne, aby praca spełniała wymogi czasopisma.

W „WS” publikowane są wyłącznie te artykuły, które otrzymają pozytywną ocenę na każdym z wymienionych etapów i zostaną poprawione przez autora zgodnie z otrzymanymi uwagami (chyba że autor przedstawi argumenty uzasadniające nieuwzględnienie danej uwagi).

Artykuły przyjęte do publikacji są zamieszczane na stronie internetowej czasopisma w zakładce Early View, gdzie znajdują się do czasu opublikowania w konkretnym wydaniu.

4. **Opracowanie redakcyjne, autoryzacja i korekta**. Artykuł zakwalifikowany do druku jest poddawany opracowaniu redakcyjnemu, a następnie – po autoryzacji – przekazywany do składu, łamania i opracowania graficznego. Następnie wykonywane są co najmniej dwie korekty wydawnicze. Autor wykonuje korektę autorską na etapie drugiej korekty wydawniczej.

Redakcja zastrzega sobie prawo do zmiany tytułu i śródtytułów, modyfikowania tablic, wykresów i innych elementów graficznych oraz przeredagowywania treści bez naruszenia zasadniczej myśli autora.

W przypadku odkrycia błędów w opublikowanym artykule zamieszcza się na łamach „WS” sprostowanie lub erratę, a artykuł w wersji elektronicznej jest poprawiany i umieszczany na stronie internetowej „WS” z adnotacją o dokonanej poprawce.

3. Zasady etyki publikacyjnej

Wszyscy uczestnicy procesu publikacyjnego są zobowiązani do przestrzegania zasad etyki publikacyjnej. Zasady przyjęte w „Wiadomościach Statystycznych. The Polish Statistician” („WS”) opierają się na wytycznych Komitetu ds. Etyki Publikacyjnej (Committee on Publication Ethics – COPE), które są dostępne na stronie internetowej www.publicationethics.org.

W celu zapewnienia transparentności w publikowaniu wyników badań naukowych wymagane jest, aby każdy uczestnik procesu publikacyjnego zgłaszał potencjalne konflikty interesów. Przez konflikt interesów rozumiane jest

wszystko, co zakłóca lub może być w sposób uzasadniony postrzegane jako zakłócające pełne i obiektywne prezentowanie i recenzowanie artykułów przesłanych do czasopisma, podejmowanie decyzji redakcyjnych w ich sprawie lub ich publikowanie. Konflikty interesów mogą mieć charakter finansowy lub niefinansowy, zawodowy lub osobisty i mogą powstać w stosunkach z instytucją lub inną osobą [na podstawie: <https://journals.plos.org/plosone/s/competing-interests>].

Redakcja nie toleruje przejawów nierzetelności naukowej, takich jak:

- plagiat – przywłaszczenie cudzego utworu lub jego fragmentu bez podania informacji o źródle;
- autoplgiat – ponowne publikowanie własnego utworu lub jego części;
- fabrykowanie danych – oparcie pracy naukowej na nieprawdziwych wynikach badań;
- autorstwo widmowe (*ghost authorship*) – nieujawnianie współautorów, mimo że wnieśli oni istotny wkład w powstanie artykułu;
- autorstwo gościnne (*guest authorship*) – podawanie jako współautorów osób o znikomym udziale lub niebiorących udziału w tworzeniu artykułu, aby lista autorów wyglądała bardziej imponująco;
- autorstwo grzecznościowe (*gift authorship*) – dodawanie jako współautorów osób, których wkład jest oparty jedynie na słabym powiązaniu z badaniem, w ramach przysługi, uznania lub uprzejmości.

Odpowiedzialność poszczególnych uczestników procesu publikacyjnego w zakresie etyki publikacyjnej jest przedstawiona poniżej.

3.1. Odpowiedzialność autorów

3.1.1. Oryginalność pracy

Artykuły naukowe zgłaszane do publikacji w „WS” muszą stanowić własność intelektualną autorów i być pracami oryginalnymi, nie mogą naruszać praw autorskich innych osób, być wcześniej publikowane ani złożone w innym wydawnictwie (także w innej wersji językowej), a w przypadku wykorzystania narzędzi sztucznej inteligencji autorzy muszą mieć większościowy wkład twórczy w powstanie artykułu, co deklarują w oświadczeniu. W przypadku złożenia artykułu w innym wydawnictwie przed ukazaniem się go w „WS” autorzy są zobowiązani do niezwłocznego powiadomienia o tym redakcji.

Jeżeli materiały, na podstawie których powstał artykuł, były prezentowane publicznie, np. podczas konferencji, to autorzy powinni poinformować o tym redakcję, zgłaszając tekst do publikacji w „WS”.

Jeśli autorzy zgłoszonego artykułu umieścili go w repozytorium przed opublikowaniem w „WS”, to niezwłocznie po ukazaniu się numeru „WS” z tym artykułem powinni podać przy artykule zamieszczonym w repozytorium link do publikacji w „WS”.

3.1.2. Autorstwo

Autorzy ponoszą odpowiedzialność za treści prezentowane w artykułach.

W artykule muszą być wskazane wszystkie osoby, które wniosły znaczący wkład w jego powstanie. Niedopuszczalne jest autorstwo widmowe, gościnne i grzecznościowe.

Autor zgłaszający artykuł określa procentowy udział autorów i ich wkład odpowiednio dla:

- koncepcji i projektu badania;
- gromadzenia lub zestawiania danych;
- analizy i interpretacji danych;
- napisania artykułu;
- krytycznego zrecenzowania artykułu;
- zatwierdzenia ostatecznej wersji artykułu.

Wszelkie zmiany na liście autorów (dodawanie lub usuwanie nazwisk i zmiana kolejności autorów) po zgłoszeniu artykułu do publikacji w „WS” wymagają przesłania do redakcji formularza zmiany na liście autorów podpisanego przez wszystkich autorów. Redakcja nie rozstrzyga ewentualnych sporów między autorami, a w przypadku braku możliwości uzgodnienia między nimi wspólnego stanowiska wycofuje artykuł z publikacji.

W przypadku śmierci jednego z autorów przed opublikowaniem artykułu współautorzy poręczają za niego w zakresie jego wkładu i potencjalnych konfliktów interesów.

Wkład innych osób w powstanie artykułu, który nie spełnia kryteriów autorstwa, taki jak wspieranie badania, ogólny mentoring, pełnienie funkcji koordynatora badania i inne powiązane działania, można wskazać w części artykułu pt. „Podziękowania”.

Każdy autor powinien posługiwać się identyfikatorem Open Researcher Contributor ID.

3.1.3. Rzetelność badań

Artykuły naukowe powinny zawierać precyzyjny opis badanych zjawisk i stosowanych metod oraz autorskie wnioski.

3.1.4. Cytowanie

Wszystkie zawarte w artykule informacje, dane i stwierdzenia niebędące autorskimi i wykraczające poza wiedzę powszechną muszą być opatrzone przypisem bibliograficznym, niezależnie od tego, czy są ujęte w ramy cytatu, czy nie są dosłownie przytaczane.

Autorzy artykułu ponoszą odpowiedzialność za właściwe oznaczanie cytowanych prac innych autorów.

3.1.5. Dane i odtwarzalność badań

Autorzy powinni dokładnie opisać dane użyte w badaniu empirycznym, aby umożliwić powtórzenie badania. Są także zobowiązani do udostępnienia surowych danych badawczych na

prośbę redakcji. Jeżeli spełnienie tej prośby nie jest możliwe z istotnych powodów, powinni uzasadnić swoją odmowę.

3.1.6. Użycie narzędzi sztucznej inteligencji

Podczas zbierania i analizy danych, pisania artykułu i opracowywania elementów graficznych autorzy mogą wspomagać się narzędziami sztucznej inteligencji, ale to oni powinni mieć większościowy wkład twórczy w powstanie artykułu i są w pełni odpowiedzialni za treści wygenerowane automatycznie, a tym samym za wszelkie związane z tym naruszenia etyki publikacyjnej. Są także zobowiązani do poinformowania redakcji o użyciu narzędzi sztucznej inteligencji. Takie narzędzia nie mogą być wskazane jako współautorzy.

Artykuł, w przypadku którego autorzy nie mają większościowego wkładu twórczego i który w przeważającej części powstał przy użyciu narzędzi sztucznej inteligencji, nie może być uznany za oryginalną pracę naukową i przyjęty do publikacji.

Niniejsze wytyczne nie obejmują narzędzi, które są używane do poprawy pisowni, gramatyki i ogólnej edycji.

Ostateczną decyzję o tym, czy użycie narzędzi sztucznej inteligencji jest właściwe lub dopuszczalne w przypadku danego artykułu, podejmuje redaktor naczelny.

3.1.7. Konflikt interesów

Autorzy są zobowiązani do zgłoszenia redakcji wszystkich potencjalnych konfliktów interesów odnoszących się do badania przedstawionego w artykule.

Autorzy podają w artykule źródła finansowania badania.

Niezgłoszenie istniejącego konfliktu interesów może skutkować odrzuceniem artykułu.

Ujawnienie konfliktu interesów autorów, który miał nadmierny wpływ na artykuł lub jego recenzje, po publikacji będzie skutkowało retrakcją artykułu.

3.1.8. Współpraca

Autorzy biorą udział w procesie recenzowania *double-blind peer review*, dokonywanej przez co najmniej dwóch niezależnych ekspertów z danej dziedziny. Po otrzymaniu minimum dwóch pozytywnych recenzji autorzy wprowadzają zalecane przez recenzentów poprawki i przesyłają do redakcji zaktualizowaną wersję artykułu wraz z poświadczeniem uwzględnienia poprawek.

W przypadku różnicy zdań co do zasadności proponowanych zmian i nieuwzględnienia którejś z zalecanych poprawek autorzy uzasadniają swoje stanowisko.

Autorzy zatwierdzają artykuł po opracowaniu redakcyjnym (autoryzują go) i biorą udział w korekcie autorskiej.

W razie zgłaszania przez czytelników zastrzeżeń do opublikowanych artykułów ich autorzy są zobligowani do udzielenia odpowiedzi za pośrednictwem redakcji.

3.1.9. Błędy w artykule

Jeżeli autor zauważy błędy w swoim artykule, to powinien niezwłocznie zgłosić je redakcji. Dotyczy to zarówno wszystkich etapów procesu publikacyjnego, jak i czasu po opublikowaniu artykułu. Redakcja we współpracy z autorem podejmie odpowiednie kroki, takie jak: wprowadzenie poprawek, opublikowanie sprostowania lub erraty albo wycofanie artykułu (retrakcja).

3.2. Odpowiedzialność redakcji

3.2.1. Obiektywizm i uczciwość

Redakcja podejmuje decyzję o publikacji danego artykułu, kierując się kryteriami merytorycznej oceny wartości artykułu, jego oryginalności, rzetelności i jasności przekazu, a także ścisłego związku z celem i zakresem tematycznym „WS”. Ocenia artykuły niezależnie od płci, rasy, pochodzenia etnicznego, narodowości, religii, wyznania, światopoglądu, niepełnosprawności, wieku lub orientacji seksualnej ich autorów.

3.2.2. Przeciwdziałanie nierzetelności naukowej

Redakcja nie toleruje przejawów nierzetelności naukowej, takich jak: plagiat, autoplagiat, fabrykowanie danych oraz autorstwo widmowe, gościnne i grzecznościowe.

Jeżeli na którymkolwiek etapie procesu publikacyjnego powstaje uzasadnione podejrzenie, że autorzy dopuścili się nierzetelności naukowej, redakcja skrupulatnie bada sprawę zgodnie z zasadami COPE określonymi na stronie <https://publicationethics.org/guidance/Flowcharts>. W przypadku udowodnienia nierzetelności autorów zgłoszony przez nich artykuł zostaje odrzucony (w przypadku opublikowanego artykułu – wycofany), a autorzy otrzymują informację o podjętej decyzji wraz z uzasadnieniem. Redakcja informuje o nierzetelności autorów odpowiednio podmioty (instytucje zatrudniające autorów, towarzystwa naukowe itp.).

W celu uzyskania obiektywnej oceny oryginalności nadsyłanych artykułów przed skierowaniem ich do recenzji redakcja wykorzystuje system antyplagiatowy. W przypadku wykrycia znacznego podobieństwa artykułu do innych prac lub wysokiego prawdopodobieństwa użycia narzędzi sztucznej inteligencji redaktor naczelny, po zasięgnięciu opinii pozostałych członków redakcji i Rady Konsultacyjnej, podejmuje decyzję o przyjęciu lub odrzuceniu artykułu. W przypadku odrzucenia autor otrzymuje decyzję wraz z uzasadnieniem.

3.2.3. Konflikt interesów

Redaktorzy są zobowiązani do zgłoszenia wszelkich potencjalnych konfliktów interesów odnoszących się do autorów, badań przedstawianych w artykułach i instytucji je finansujących. Nie mogą być zaangażowani w decyzje redakcyjne dotyczące artykułów ich autorstwa zgłoszonych do publikacji w „WS”. W przypadku gdy ich własne interesy mogą utrudniać im bezstronną ocenę danego artykułu i dotyczącą go decyzję o publikacji, powinni wycofać się z jego oceny lub dyskusji na jego temat.

W celu zapobiegania konfliktom interesów między recenzentami a autorami oraz zapewnienia uczciwego i bezstronnego procesu recenzowania redakcja wybiera recenzentów spośród specjalistów spoza jednostki, do której afiliowani są autorzy, i spoza Zespołu Redakcyjnego.

Jeżeli po opublikowaniu artykułu zostanie ujawniony konflikt interesów autorów, to redakcja zbada, czy miał on nadmierny wpływ na artykuł lub jego recenzje. W przypadku gdy taki wpływ zostanie stwierdzony, artykuł podlega retrakcji.

3.2.4. Poufność

Informacje dotyczące artykułu są poufne. Redaktorowi ani żadnemu innemu pracownikowi redakcji nie wolno ich ujawnić nikomu poza autorami, recenzentami, doradcami i – jeśli to uzasadnione – wydawcą.

W przypadku podjęcia decyzji o niepublikowaniu artykułu nie może on zostać w żaden sposób wykorzystany przez wydawcę lub uczestników procesu publikacyjnego bez pisemnej zgody autorów.

3.2.5. Dyskusja na temat opublikowanych artykułów

Każdy może zgłosić redakcji błędy lub naruszenia dostrzeżone w opublikowanych artykułach. Postępowanie redakcji w takich przypadkach zostało określone w punktach 3.2.6–3.2.8.

Redakcja publikuje również nadesłane polemiki z opublikowanymi artykułami.

3.2.6. Poprawki w opublikowanym artykule

W przypadku odkrycia przez autorów lub czytelników błędów w opublikowanym artykule redakcja ocenia, na ile są one istotne, i podejmuje stosowne działania.

Jeżeli wykryte błędy wpływają na interpretację danych lub przedstawionych informacji, a ich poprawienie nie powoduje naruszenia naukowej integralności artykułu, to redakcja we współpracy z autorem:

- w przypadku wersji Early View poprawia artykuł i dołącza do niego adnotację o dokonanej poprawce, z podaniem daty;
- w przypadku ostatecznej wersji publikacyjnej poprawia artykuł i dołącza do niego adnotację o dokonanej poprawce, z podaniem daty, a równocześnie opracowuje sprostowanie (jeżeli błędy są zawinione przez autora) lub erratę (jeżeli błędy powstały w trakcie przygotowania do publikacji) i publikuje na numerowanej stronie w najbliższym wydaniu „WS”.

Drobne usterki redakcyjne lub techniczne, które nie wpływają na znaczenie lub interpretację artykułu:

- w przypadku wersji Early View zawsze są korygowane; adnotacja o dokonanej poprawce nie jest dołączana;
- w przypadku ostatecznej wersji publikacyjnej zazwyczaj nie są, ale mogą być korygowane; adnotacja o dokonanej poprawce nie jest dołączana.

Redakcja powiadamia autorów o dokonaniu poprawek w opublikowanym artykule, a także archiwizuje wszystkie wersje artykułu.

Treści wykraczające poza pierwotny zakres artykułu, takie jak dodatkowe odniesienia lub aktualizacje oparte na informacjach niedostępnych w momencie publikacji artykułu, nie są dawane.

3.2.7. Wycofanie (retrakcja) opublikowanego artykułu

Jeżeli po opublikowaniu w artykule zostaje wykryty poważny błąd lub naruszenie (np. oszustwo, plagiat, naruszenie praw autorskich, powielona publikacja, nieujawniony konflikt interesów, wykorzystanie informacji poufnych niezgodnie z prawem), które unieważniają przedstawione w artykule ustalenia, to artykuł podlega retrakcji. Redakcja postępuje wtedy w następujący sposób:

- w najbliższym numerze „WS” publikowana jest notatka o wycofaniu artykułu podpisana przez autorów lub redaktora naczelnego, z podaniem daty i powodu wycofania artykułu oraz linkiem do oryginalnego artykułu;
- oryginalny artykuł pozostaje niezmienny, z wyjątkiem umieszczenia znaku wodnego na każdej stronie pliku PDF o treści „artykuł wycofany”.

3.2.8. Zastrzeżenia redakcji dotyczące opublikowanego artykułu

Jeżeli istnieją uzasadnione obawy co do rzetelności badania przedstawionego w opublikowanym artykule lub podejrzenia jakichkolwiek nieprawidłowości (dowody na niepoprawność badania przeprowadzonego przez autorów nie są rozstrzygające, ale charakter wątpliwości uzasadnia powiadomienie czytelników; istnieje uzasadniona obawa, że ustalenia są niewiarygodne lub że mogło dojść do nieprawidłowości), redakcja może opublikować notatkę z zastrzeżeniami, że do wyników przedstawionego w nim badania należy podchodzić z ostrożnością. Takie zastrzeżenia są publikowane jedynie w przypadku, gdy dochodzenie dotyczące artykułu nie przyniosło rezultatów. Redakcja może opublikować swoje zastrzeżenia również wtedy, gdy dochodzenie w sprawie wątpliwego artykułu jest w toku.

3.3. Odpowiedzialność recenzentów

3.3.1. Rzetelność i terminowość

Recenzenci przyjmują artykuł do zrecenzowania, jeśli posiadają odpowiednią wiedzę w określonej dziedzinie, aby rzetelnie ocenić pracę, a także gdy mogą wywiązać się z terminu ustalonego przez redakcję, aby nie opóźniać publikacji.

3.3.2. Obiektywizm

Recenzenci uczestniczą w procesie opartym na modelu *double-blind peer review*, zgodnie z którym nie znają tożsamości autorów ani ich tożsamość nie jest znana autorom.

Recenzenci oceniają artykuł zgodnie z kryteriami zawartymi w karcie recenzji „WS”. Powinni uzasadnić swoją ocenę, przedstawiając stosowną argumentację. Są zobligowani do zachowania obiektywności i powstrzymania się od osobistej krytyki.

3.3.3. Wsparcie redakcji

Recenzenci wspierają redakcję w ocenie artykułów zgłoszonych do publikacji. Ich zadaniem jest wyrażenie opinii, czy artykuł:

- może być opublikowany w obecnej formie;
- może być opublikowany po uwzględnieniu zalecanych poprawek;
- wymaga znacznej modyfikacji i ponownej oceny recenzenta (w ponownej ocenie zapada ostateczna decyzja o dopuszczeniu do publikacji lub odrzuceniu);
- nie powinien zostać opublikowany.

3.3.4. Wsparcie autora

Recenzenci powinni wskazać ważne dla wyników badań opublikowane prace, które w ich ocenie powinny zostać przywołane w ocenianym artykule.

3.3.5. Użycie narzędzi sztucznej inteligencji

Niedopuszczalne jest korzystanie z narzędzi sztucznej inteligencji podczas sporządzania recenzji, z wyjątkiem narzędzi, które są używane do poprawy pisowni, gramatyki i ogólnej edycji.

3.3.6. Przeciwdziałanie nierzetelności naukowej

W razie stwierdzenia wysokiego poziomu zbieżności treści recenzowanej pracy z innymi opublikowanymi materiałami lub podejrzenia innych przejawów nierzetelności naukowej recenzenci informują o tym redakcję.

3.3.7. Konflikt interesów

Recenzenci są zobowiązani do zgłoszenia redakcji – zgodnie z ich stanem wiedzy – wszelkich potencjalnych konfliktów interesów odnoszących się do autorów, przedstawionych w artykule badań i instytucji je finansujących. Jeżeli uznają, że istnieje taki konflikt interesów, to powinni odstąpić od recenzowania artykułu.

3.3.8. Poufność

Recenzenci powinni traktować artykuły przesłane im do zrecenzowania jako poufne. Nie mogą ich udostępniać ani omawiać z osobami spoza redakcji, chyba że redakcja wyrazi na to zgodę. Po ukończeniu recenzji przechowywanie przesłanych przez redakcję materiałów (w jakiegokolwiek formie) oraz posługiwanie się nimi przez recenzentów jest niedozwolone.

3.4. Odpowiedzialność wydawcy

3.4.1. Ochrona własności intelektualnej

Materiały opublikowane w „WS” są chronione prawem autorskim. Od 2022 r. autorzy udzielają wydawcy – Głównemu Urzędowi Statystycznemu – licencji Creative Commons Uznanie autorstwa – Na tych samych warunkach 4.0 (CC BY-SA 4.0), która jest dostępna na stronie <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pl>. Szczegółowa informacja o prawach autorskich (copyright) jest podawana przy każdym artykule, zarówno w wersji elektronicznej, jak i drukowanej.

3.4.2. Otwarty dostęp

Wydawca udostępnia pełną treść artykułów w internecie w trybie otwartego dostępu, tj. bezpłatnie i bez technicznych ograniczeń. Użytkownicy mogą czytać, pobierać, kopiować, drukować i wykorzystywać do innych celów artykuły zamieszczone na stronie internetowej czasopiisma, zgodnie z zapisami:

- ustawy o otwartych danych i ponownym wykorzystywaniu informacji sektora publicznego w przypadku artykułów zgłoszonych do 31.12.2021 r.;
- licencji Creative Commons w przypadku artykułów zgłoszonych po 31.12.2021 r.
Inne sposoby wykorzystania treści artykułów „WS” wymagają zgody wydawcy.

3.4.3. Sprostowania, erraty i przeprosiny

Wydawca deklaruje gotowość do opublikowania sprostowań, errat i przeprosin.

3.5. Odwołania i skargi

3.5.1. Odwołania

Autorzy mogą się odwołać od decyzji o niepublikowaniu artykułu. W tym celu powinni skontaktować się z redaktorem naczelnym lub sekretarzem redakcji i przedstawić stosowną argumentację. Odwołania autorów są rozpatrywane przez redaktora naczelnego.

3.5.2. Skargi

Każdy uczestnik procesu publikacyjnego oraz czytelnicy mają prawo do złożenia skargi. Skargę należy przesłać do adres redakcji udostępniony w zakładce Kontakt.

4. Wymogi redakcyjne

Zgodnie z wymogami czasopisma omawiany w artykule problem badawczy powinien być jednoznacznie zdefiniowany oraz istotny dla oceny zjawisk społecznych lub gospodarczych. Artykuł powinien zawierać wyraźnie określony cel badania, precyzyjny opis badanych zjawisk i stosowanych metod, uzyskane wyniki przeprowadzonej analizy oraz autorskie wnioski.

4.1. Struktura i zawartość artykułu

Wymagane elementy artykułu recenzowanego:

1. Tytuł.
2. Dane autora: imię/imiona i nazwisko, afiliacja w języku polskim i angielskim, ORCID, e-mail. W przypadku artykułu wieloautorskiego należy wskazać autora korespondencyjnego.
3. Streszczenie (zalecana objętość – do 1200 znaków ze spacjami, forma bezosobowa). W przypadku artykułu opisującego badanie empiryczne powinno zawierać: cel, przedmiot, okres i metodę badania, źródła danych i najważniejsze wnioski z badania. W przypadku artykułów o innym charakterze należy podać co najmniej cel artykułu, przedmiot i najważniejsze wnioski.

Streszczenie to podstawowe źródło informacji o artykule, warunkujące też decyzję czytelnika o zapoznaniu się z całą pracą. Dlatego powinno być przygotowane ze szczególną starannością i dbałością o umieszczenie w nim wszystkich wymaganych elementów.

4. Słowa kluczowe – najistotniejsze pojęcia lub wyrażenia użyte w pracy (nie mniej niż trzy). Powinny być zawarte w streszczeniu i/lub tytule.
5. Kod/kody z klasyfikacji Journal of Economic Literature (JEL).
6. Tłumaczenie tytułu, streszczenia i słów kluczowych (na język angielski w przypadku artykułu napisanego w języku polskim, a na język polski w przypadku artykułu napisanego w języku angielskim).
7. W artykule opisującym badanie empiryczne wymagane są następujące części:
 - *Wprowadzenie*, zawierające syntetyczne przedstawienie zagadnień teoretycznych, uzasadnienie podjęcia danego problemu badawczego, cel badania i krytyczne odniesienie do

literatury przedmiotu. W wyjątkowych przypadkach, kiedy istotne dla podjętego tematu jest obszerniejsze przedstawienie dyskusji toczącej się w literaturze, przegląd literatury może stanowić odrębną część artykułu;

- *Metoda badania*, uwzględniająca przedmiot i okres badania, źródła danych i zastosowane metody badawcze, w tym uzasadnienie ich wyboru;
- *Wyniki badania* – analiza danych oraz interpretacja wyników i odniesienie ich do rezultatów wcześniejszych badań (dyskusja). W uzasadnionych przypadkach dyskusja może stanowić odrębną część artykułu;
- *Podsumowanie*, które powinno być zwarte i odzwierciedlać istotę problemu badawczego przedstawionego w artykule, bez podawania danych liczbowych; końcowe wnioski powinny odnosić się do treści artykułu, a w szczególności do celu badania;
- *Bibliografia*, zawierająca pełny wykaz prac i materiałów przywołanych w artykule, przygotowana zgodnie z wymogami czasopisma (zob. Przywoływanie źródeł w artykułach napisanych w języku polskim oraz Bibliografia załącznikowa w artykułach napisanych w języku polskim).

Wszystkie części powinny być opatrzone numerami.

8. Jeżeli podczas gromadzenia i analizy danych, pisania artykułu lub opracowywania elementów graficznych do niego autor korzystał z narzędzi sztucznej inteligencji, to powinien podać w tekście, jakich narzędzi i do czego użył.

W przypadku artykułu nierecenzowanego nie są wymagane streszczenie, słowa kluczowe ani kody JEL. Bibliografia załącznikowa jest opcjonalna.

4.2. Przygotowanie artykułu

1. Artykuł powinien być utrzymany w formie bezosobowej.
2. Tekst należy zapisać alfabetem łacińskim. Nazwy własne, tytuły itp. oryginalnie zapisane innym alfabetem powinny być poddane transliteracji.
3. Nie należy stosować stylów; formatowanie należy ograniczyć do wymogów redakcyjnych.
4. Objętość artykułu łącznie ze streszczeniem, słowami kluczowymi, bibliografią, tablicami, wykresami i innymi materiałami graficznymi nie powinna być mniejsza niż 10 stron maszynopisu ani przekraczać 20 stron.
5. Edytor tekstu: Microsoft Word, format *.doc lub *.docx.
6. Krój czcionki:
 - Arial – tytuł, autor, streszczenie, słowa kluczowe, kody JEL, śródtytuły, elementy graficzne (tablice, zestawienia, wykresy, schematy), przypisy;
 - Times New Roman – tekst główny, bibliografia.
7. Wielkość czcionki:
 - 14 pkt – tytuł, autor, śródtytuły wyższego rzędu;
 - 12 pkt – tekst główny, śródtytuły niższego rzędu;
 - 10 pkt – pozostałe elementy.
8. Marginesy – 2,5 cm z każdej strony.
9. Interlinia – 1,5 wiersza; tablice i przypisy – 1 wiersz; przed tytułami rozdziałów i podrozdziałów oraz po nich – pusty wiersz.

10. Wcięcie akapitowe – 0,4 cm; bibliografia – bez wcięcia, wysunięcie 0,4 cm.
11. Przy wycieniach należy posłużyć się listą punktowaną z punktarami w postaci kropek (wysunięcie 0,4 cm, wcięcie 0 cm); wiersze (oprócz ostatniego) zakończone średnikiem.
12. Strony ponumerowane automatycznie.
13. Tablice i elementy graficzne (wykresy, mapy, schematy) muszą być przywołane w tekście.
14. Wykresy, mapy i schematy należy zamieścić w tekście głównym. Wykresy powinny być edytowalne (optymalnie wykonane w programie Excel; w przypadku wykonania w programie graficznym powinny mieć postać wektorową). Wykresy i inne materiały graficzne należy przekazać osobno, najlepiej w pliku programu Excel lub innym edytowalnym w pakiecie Microsoft Office.
15. Tablice muszą być edytowalne. Nie należy stosować rastrów, cieniowania, pogrubiania czy też podwójnych linii itp.
16. Wskazówki dotyczące opracowywania map znajdują się w publikacji *Mapy statystyczne. Opracowanie i prezentacja danych*, dostępnej na stronie internetowej GUS.
17. Pod tablicami i każdym elementem graficznym należy podać źródło opracowania, a także objaśnić użyte w nich skróty i symbole.
18. Literowe symbole liczb i innych wielkości niezłożonych należy zapisywać małą lub dużą literą i pismem pochyłym (np. a , A , $y(x)$, a_i); wektorów – pismem pochyłym i pogrubionym (np. \mathbf{a} , \mathbf{A} , \mathbf{w} , $\mathbf{y}(x)$, \mathbf{w}_i); macierzy – pismem prostym i pogrubionym (np. \mathbf{A} , \mathbf{a} , \mathbf{M} , $\mathbf{Y}(x)$, \mathbf{M}_i).
19. Objasnienia znaków umownych i zapisów w tablicach: kreska (–) – zjawisko nie wystąpiło; zero (0) – zjawisko istniało w wielkości mniejszej od 0,5; (0,0) – zjawisko istniało w wielkości mniejszej od 0,05; kropka (.) – brak informacji, konieczność zachowania tajemnicy statystycznej, wypełnienie pozycji jest niemożliwe lub niecelowe; „w tym” – oznacza, że nie podaje się wszystkich składników sumy.
20. Stosowane są następujące skróty: tablica – tabl., wykres – wykr.
21. Wszystkie zawarte w artykule informacje, dane i stwierdzenia wykraczające poza wiedzę powszechną – np. wyniki badań innych autorów, zarówno o charakterze empirycznym, jak i koncepcyjnym – muszą być opatrzone przypisem bibliograficznym. Przez wiedzę powszechną należy rozumieć informacje ogólnie znane i niebudzące wątpliwości ani kontrowersji w danej grupie społecznej, np. utworzenie GUS w 1918 r. lub powstanie UE w 1993 r. na podstawie traktatu z Maastricht. Natomiast dane statystyczne udostępniane lub publikowane np. przez GUS lub Eurostat nie należą do takich informacji. Charakteru wiedzy powszechnej nie mają również stwierdzenia odnoszące się do idei, zjawisk i procesów społecznych, politycznych czy gospodarczych. Nawet pozornie zdroworozsądkowe idee zmieniają bowiem swój sens w zależności od kultury, języka lub dyscypliny naukowej, a także bywają w rozmaity sposób konceptualizowane, jak np. pojęcie poznania w naukach społecznych.
Podanie źródła jest konieczne niezależnie od tego, czy informacje lub stwierdzenia są ujęte w ramy cytatu, czy przedstawione bez dosłownego przytoczenia, np. w formie parafrazy. Jeżeli stwierdzenie może budzić jakiegokolwiek wątpliwości odbiorców, autor powinien wskazać stosowne źródło podawanej informacji.
22. Przypisy rzeczowe, słownikowe lub informacyjne należy umieszczać na dole strony. Przypisy bibliograficzne, zgodnie ze standardem APA (American Psychological Association), należy podawać w tekście głównym.
23. Bibliografię należy przygotować zgodnie ze standardem APA.

4.3. Przywoływanie źródeł w artykułach w języku polskim

4.3.1. Ogólne zasady stylu APA

Wyszczególnienie		Przykład przywołania	
		w odsyłaczu (w nawiasie)	w treści zdania
Autor indywidualny			
Jeden autor		(Filipiak, 2001)	Filipiak (2001)
Dwóch autorów		(Dąbrowska i Nowak, 1999)	Dąbrowska i Nowak (1999)
Trzech autorów lub więcej		(Jankiewicz i in., 2003)	Jankiewicz i in. (2003)
Dwie prace z tego samego roku, czterech autorów, w tym:	ten sam pierwszy autor	(Bągińska, Radwan i in., 2017) (Bągińska, Szewczyk i in., 2017)	Bągińska, Radwan i in. (2017) Bągińska, Szewczyk i in. (2017)
	dwóch tych samych pierwszych autorów	(Andrzejewski, Cieślak, Daszkiewicz i Wróblewska, 2023) (Andrzejewski, Cieślak, Pietrzak i Zając, 2023)	Andrzejewski, Cieślak, Daszkiewicz i Wróblewska (2023) Andrzejewski, Cieślak, Pietrzak i Zając (2023)
Dwie prace autorów o tym samym nazwisku		(T. Piotrowski i Sadowska, 2015; R. Piotrowski, 2022)	T. Piotrowski i Sadowska (2015), R. Piotrowski (2022)
Autor instytucjonalny			
Nazwa funkcjonuje jako powszechnie znany skrótowiec:	pierwsze przywołanie	(Główny Urząd Statystyczny [GUS], 2020)	Główny Urząd Statystyczny (GUS, 2020)
	kolejne przywołania	(GUS, 2020)	GUS (2020)
Pełna nazwa		(Stanford University, 1995)	Stanford University (1995)
Niepełne dane bibliograficzne			
Nieznany autor		(<i>Tytuł</i> , 2015)	<i>Tytuł</i> (2015)
Nieznany rok wydania		(Kowalczyk, b.r.)	Kowalczyk (b.r.)
Inne przypadki			
Przywoływanie kilku źródeł (porządek prac – chronologiczny, porządek autorów – alfabetyczny)		(Grzenda, b.r., 1997, 2004a, 2004b; Nowak, 2002; Stec, 1987)	Grzenda (b.r., 1997, 2004a, 2004b), Nowak (2002) i Stec (1987)
Przywoływanie źródeł za innym autorem (uwaga: w bibliografii należy wymienić tylko pracę czytaną)		(Nowakowski, 1990, za: Zieniecka, 2007)	Nowakowski (1990, za: Zieniecka, 2007)
Praca tłumaczona, przedruk lub wydanie wznowione		(Adamski, 1857/2020)	Adamski (1857/2020)
Przytaczanie dosłownego cytatu lub parafrazowanie fragmentu cytowanego źródła		(Wójcik, 2021, s. 6–7)	Wójcik (2021, s. 6–7)

Źródło: opracowanie własne na podstawie: American Psychological Association. (2020). *Publication manual of the American Psychological Association* (wyd. 7). <https://doi.org/10.1037/0000165-000>.

4.3.2. Wewnętrzne zasady szczegółowe redakcji „WS”

4.3.2.1. Bazy danych Głównego Urzędu Statystycznego

W przypadku korzystania z danych zaczerpniętych z baz Głównego Urzędu Statystycznego trzeba podać w miejscu, w którym baza jest przywoływana po raz pierwszy w artykule:

- pełną nazwę bazy;
- skrótowiec utworzony od tej nazwy, jeśli taki funkcjonuje (w innym wypadku – bez skrótowca);
- nazwę jej właściciela;
- adres internetowy bazy w nawiasie.

W kolejnych przywołaniach, np. w źródle pod wykresem, należy posługiwać się już tylko samą nazwą bazy lub skrótowcem.

Przykładowe bazy danych Głównego Urzędu Statystycznego	
pierwsze przywołanie	kolejne przywołania
Bank Danych Lokalnych (BDL) Głównego Urzędu Statystycznego (https://bdl.stat.gov.pl)	BDL
Dziedzinowe Bazy Wiedzy (DBW) Głównego Urzędu Statystycznego (https://dbw.stat.gov.pl)	DBW
Baza Demografia Głównego Urzędu Statystycznego (https://demografia.stat.gov.pl)	Baza Demografia

4.3.2.2. Akty prawne

Jednokrotne przywołanie

Jeśli autor powołuje się w artykule na akt prawny, to powinien podać jego pełny oficjalny tytuł (bez numeru dziennika urzędowego). W zależności od kontekstu może go ująć:

- w treści zdania, np.

Artykuł 18 ust. 1 Ustawy z dnia 29 czerwca 1995 r. o statystyce publicznej określa stałe elementy składowe każdego badania statystycznego.

- lub w formie odsyłacza bibliograficznego, czyli w nawiasie, np.

Statystyka publiczna zapewnia równopranny, równorzędny i równoczesny dostęp do wynikowych informacji statystycznych (Ustawa z dnia 29 czerwca 1995 r. o statystyce publicznej).

Długi tytuł aktu prawnego można skrócić, zachowując jego początkową część i dodając wielokropek, np.

W latach 2022–2023, dzięki dwóm dyrektywom Unii Europejskiej, wprowadzono 11 kolejnych zmian w prawie pracy wspierających *work-life balance* (Dyrektywa Parlamentu Europejskiego i Rady (UE) 2019/1152 z dnia 20 czerwca 2019 r. w sprawie przejrzystych i przewidywalnych warunków pracy w Unii Europejskiej; Dyrektywa Parlamentu Europejskiego i Rady (UE) 2019/1158 z dnia 20 czerwca 2019 r. w sprawie równowagi między życiem zawodowym a prywatnym rodziców i opiekunów...).

Wielokrotne przywołania

W przypadku gdy autor zamierza odwoływać się w artykule do aktu prawnego więcej niż raz, a tytuł aktu prawnego jest długi, powinien przy pierwszym przywołaniu oprócz jego pełnego oficjalnego tytułu wprowadzić również krótszą nazwę opisową i tylko jej używać w dalszej części pracy, np.

Zgodnie z Rozporządzeniem Parlamentu Europejskiego i Rady (UE) nr 1260/2013 z dnia 20 listopada 2013 r. w sprawie statystyk europejskich w dziedzinie demografii (dalej: rozporządzenie nr 1260/2013) *ludność rezydująca* to ludność mieszkająca w państwie członkowskim nieprzerwanie przez okres co najmniej 12 miesięcy przed czasem odniesienia. [...] Chociaż rozporządzenie nr 1260/2013 obowiązuje od 2013 r., to GUS przekazał do Eurostatu dane o liczbie i strukturze ludności rezydującej również za lata 2009–2012.

W całym artykule należy przyjąć jednolity sposób tworzenia krótszych nazw opisowych aktów prawnych.

Spoza Polski i UE

W przypadku aktów prawnych, które nie zostały wydane ani przez władze Polski, ani władze Unii Europejskiej i są dostępne w języku angielskim (oficjalne tłumaczenie), należy posługiwać się tytułem angielskim, np.

Rada Ministrów Uzbekistanu przyjęła rezolucję, w której określiła zadania organizacji i ministerstw związane z realizacją SDG do 2030 r. (Resolution of the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan No. 841 of 20th October 2018 ‘On measures to implement national goals and objectives in the field of sustainable development until 2030’).

Zapis tytułu aktu prawnego, który nie jest dostępny w języku angielskim, zależy od alfabetu:

- alfabet łaciński – tytuł trzeba przywołać w wersji oryginalnej, np.

Podstawę prawną statystyki publicznej we Francji stanowią zasadniczo dwa dokumenty: ustawa specjalna dotycząca zadań publicznej służby statystycznej (Loi n° 51-711 du 7 juin 1951 sur l’obligation, la coordination et le secret en matière de statistiques) oraz ustawa o ochronie danych, której podlega przetwarzanie danych statystycznych, podobnie jak przetwarzanie danych dotyczących osób fizycznych (Loi n° 78-17 du 6 janvier 1978 relative à l’informatique, aux fichiers et aux libertés).

- alfabet inny niż łaciński – tytuł trzeba poddać transkrypcji, np.

W kwietniu 2021 r. w Serbii przyjęto ustawę o zmianie ustawy o powszechnym spisie ludności, gospodarstw domowych i mieszkań, na mocy której możliwe było przełożenie spisu z powodu pandemii COVID-19 (Zakon o izmjenama zakona o popisu stanovništva, domaćinstava i stanova 2022. Godine).

Tytuły aktów prawnych podawane w tekście i w bibliografii załącznikowej muszą być takie same.

4.4. Bibliografia załącznikowa

4.4.1. Zasady ogólne

1. Bibliografia powinna:

- zawierać wyłącznie źródła przywołane w artykule;
- być zapisana w alfabecie łańskim (opisy bibliograficzne w innym alfabecie należy podać transkrypcji);
- być uporządkowana alfabetycznie według nazwiska pierwszego autora lub – w przypadku publikacji nieznanego autora – tytułu publikacji (w przypadku tytułów zaczynających się od liczb decyduje pierwsza wymawiana głoska).

2. W opisach bibliograficznych należy podawać:

- pełną nazwę autora instytucjonalnego, nawet jeśli w artykule był używany skrótowiec;
- pełną nazwę wydawcy;
- elementy takie jak: „redaktor” (red.), „wydanie” (wyd.), „tłumaczenie” (tłum.) i „strona” (s.) w skrócie i w języku polskim, niezależnie od języka, w jakim źródło zostało opracowane;
- numer DOI (Digital Object Identifier), jeśli źródło jest nim opatrzone, lub adres strony internetowej, jeśli nie ma DOI, a źródło można znaleźć w internecie. Nie należy zamieszczać linków do baz czasopism czy repozytoriów;
- w przypadku tekstów na stronie internetowej (dostępnych tylko online) – datę dostępu wyłącznie wtedy, gdy zawartość strony nie jest archiwizowana (zmienia się).

3. Zasady porządkowania źródeł są następujące:

- prace jednego autora / kilku tych samych autorów należy ułożyć według roku wydania, zaczynając od najwcześniejszego;
- jeśli kilka prac tego samego autora / tych samych autorów zostało opublikowanych w tym samym roku, należy podać je alfabetycznie według tytułu i odpowiednio oznaczyć poprzez dopisanie przy roku wydania liter a, b, c itd. Dopisek „red.” nie ma wpływu na porządek alfabetyczny takich prac (decydują ich tytuły);
- prace tego samego autora / tych samych autorów z nieznanym rokiem wydania (bez roku – b.r.) trzeba umieścić przed pracami z rokiem wydania, a prace „w druku” – po pracach z rokiem wydania.

4.4.2. Przykłady opisów bibliograficznych

Typ źródła	Przykład opisu bibliograficznego	
Artykuł w czasopiśmie		
W formie:	drukowanej	Nazwisko, X. (rok). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma, rocznik(zeszyt)</i> , strona początku–strona końca.
	elektronicznej, z DOI	Nazwisko, X., Nazwisko 2, Y. (rok). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma, rocznik(zeszyt)</i> , strona początku–strona końca. https://doi.org/xxx .
	elektronicznej, bez DOI	Nazwisko, X., Nazwisko 2, Y., Nazwisko 3, Z. (rok). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma, rocznik(zeszyt)</i> , strona początku–strona końca. https://xxx .
Opublikowany w trybie online first (przed włączeniem do numeru czasopisma)	Nazwisko, X. (rok). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma</i> . Opublikowany w trybie online first. https://xxx .	

Typ źródła (cd.)	Przykład opisu bibliograficznego (cd.)
------------------	--

Artykuł w gazecie codziennej

W formie:	drukowanej	Nazwisko, X. (rok, dzień miesiąc). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma</i> , strona lub strona początku–strona końca.
	elektronicznej	Nazwisko, X. (rok, dzień miesiąc). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma</i> . https://xxx . Nazwisko, X. (b.r.). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma</i> . https://xxx . Tytuł artykułu. (rok, dzień miesiąc). <i>Tytuł czasopisma</i> . https://xxx .

Książka

W formie:	drukowanej	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> . Wydawnictwo.
	elektronicznej, z DOI	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> . Wydawnictwo. https://doi.org/xxx .
	elektronicznej, bez DOI	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> . Wydawnictwo. https://xxx .
W przekładzie		Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> (tłum. Y. Nazwisko). Wydawnictwo.
Wydanie wielotomowe:	tom niezatytułowany	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> (t. numer tomu w alfabecie arabskim). Wydawnictwo.
	tom zatytułowany	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki: t. numer tomu w alfabecie arabskim</i> . <i>Tytuł tomu</i> . Wydawnictwo.
Kolejne wydanie		Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> (wyd. numer wydania). Wydawnictwo.
Pod redakcją		Nazwisko, X. (red.). (rok). <i>Tytuł książki</i> . Wydawnictwo.

Rozdział w pracy zbiorowej i hasło słownikowe/encyklopedyczne

Rozdział w pracy zbiorowej		Nazwisko, X. (rok). Tytuł rozdziału. W: Y. Nazwisko, Z. Nazwisko 2 (red.), <i>Tytuł książki</i> (s. strona początku–strona końca). Wydawnictwo.
Hasło ze słownika lub z encyklopedii w formie:	drukowanej	Nazwisko autora hasła, X. (rok). Hasło. W: Y. Nazwisko (red.), <i>Tytuł</i> . Wydawnictwo.
	elektronicznej	Hasło. (rok). W: Y. Nazwisko (red.), <i>Tytuł</i> . Wydawnictwo. https://xxx .

Raporty i szara literatura

Autor:	indywidualny	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł raportu</i> . Wydawnictwo. https://doi.org/xxx .
	instytucjonalny	Nazwa instytucji. (rok). <i>Tytuł raportu</i> . Wydawnictwo (tylko jeśli wydawcą jest instytucja inna niż autorska).
Working papers		Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł pracy</i> (nazwa serii i numer). https://xxx .

Typ źródła (cd.)		Przykład opisu bibliograficznego (cd.)
Materiały z konferencji		
Opublikowane w formie:	książki	zob. przykład opisu książki lub rozdziału
	czasopisma	zob. przykład opisu artykułu w czasopiśmie
Niepublikowane (wygłoszone)		Nazwisko, X. (rok, dzień miesiąc). <i>Tytuł pracy</i> [typ wystąpienia, np. referat lub prezentacja]. Nazwa i miejsce (miasto, kraj) konferencji.
Rozprawa doktorska		
Niepublikowana		Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł pracy</i> [niepublikowana rozprawa doktorska]. Nazwa instytucji nadającej tytuł doktorski.
Opublikowana, dostępna w internecie		Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł pracy</i> [rozprawa doktorska, nazwa instytucji nadającej tytuł doktorski]. https://xxx .
Maszynopis		
Niepublikowany / przygotowywany przez autora / zgłoszony do publikacji, ale jeszcze niezaakceptowany		Nazwisko, X. (rok). Tytuł [maszynopis niepublikowany / w przygotowaniu / zgłoszony do publikacji].
Artykuł zaakceptowany do publikacji w czasopiśmie		Nazwisko, X. (w druku). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma</i> .
Opublikowany nieformalnie (np. na stronie internetowej autora)		Nazwisko, X. (rok). Tytuł. https://xxx .
Akt prawny¹		
Polski i UE		Pełny tytuł aktu prawnego w języku polskim (numer/pozycja w dzienniku urzędowym).
Spoza Polski i UE	dostępny w języku angielskim	Pełny tytuł aktu prawnego w języku angielskim (numer/pozycja w dzienniku urzędowym). https://xxx .
	dostępny tylko w języku oryginalnym, w alfabecie łacińskim	Pełny tytuł aktu prawnego w języku oryginalnym (numer/pozycja w dzienniku urzędowym). https://xxx .
	dostępny tylko w języku oryginalnym, w innym alfabecie niż łaciński	Pełny tytuł aktu prawnego w transkrypcji z języka oryginalnego (numer/pozycja w dzienniku urzędowym). https://xxx .
Tekst na stronie internetowej (dostępny tylko online)		
Znana data publikacji, zawartość strony jest archiwizowana (nie zmienia się)		Nazwisko, X. (rok, dzień miesiąc). <i>Tytuł</i> . https://xxx .
Nieznana data publikacji, zawartość strony nie jest archiwizowana (zmienia się)		Nazwa instytucji. (b.r.). <i>Tytuł</i> . Pobrane dzień miesiąc rok pobrania z https://xxx .

¹ Wewnętrzne zasady redakcji „WS”.

Typ źródła (dok.)	Przykład opisu bibliograficznego (dok.)
-------------------	---

Zbiór danych pobranych ze strony internetowej

Dane opublikowane:	znana data publikacji, zawartość zbioru jest archiwizowana (nie zmienia się)	Nazwisko, X. (rok). <i>Nazwa zbioru danych</i> [zbiór danych]. Wydawca. https://xxx .
	nieznana data publikacji, zawartość zbioru nie jest archiwizowana (zmienia się)	Nazwa instytucji. (b.r.). <i>Nazwa zbioru danych</i> [zbiór danych]. Wydawca (tylko jeśli wydawcą jest instytucja inna niż autorska / właściciel danych). Pobrane dzień miesiąc rok pobrania z https://xxx .

Materiały audiowizualne

Nagranie wideo	Nazwisko, X. (rok, dzień miesiąc). <i>Tytuł</i> [wideo]. Nazwa kanału, na którym nagranie zostało udostępnione (np. YouTube). https://xxx .
Webinar	Nazwisko, X. lub nazwa instytucji. (rok, dzień miesiąc). <i>Tytuł</i> [webinar].

Posty w serwisach społecznościowych

Post na portalu X lub Instagramie	Nazwisko, X. lub nazwa instytucji [@ nazwa użytkownika] (rok, dzień miesiąc). <i>Treść – do 20 wyrazów</i> [post]. Nazwa serwisu społecznościowego (X lub Instagram). https://xxx .
Post na Facebooku	Nazwisko, X. lub nazwa instytucji [nazwa użytkownika] (rok, dzień miesiąc). <i>Treść – do 20 wyrazów</i> [post]. Facebook. https://xxx .

Źródło: opracowanie własne na podstawie: American Psychological Association. (2020). *Publication manual of the American Psychological Association* (wyd. 7). <https://doi.org/10.1037/0000165-000>.

Praca przygotowana w sposób niezgodny z powyższymi wskazówkami będzie odesłana do autora z prośbą o dostosowanie formy artykułu do wymogów redakcyjnych.

STAŁE DZIAŁY „WS” – ZAKRES TEMATYCZNY

PERMANENT SECTIONS OF WS – THEMATIC SCOPE

Tematy artykułów	Topics of the articles
Studia metodologiczne / Methodological studies	
<ul style="list-style-type: none"> • Oryginalne lub udoskonalone rozwiązania metodologiczne, które mogą znaleźć zastosowanie w analizach statystycznych i służyć podnoszeniu ich jakości • Projektowanie badań statystycznych 	<ul style="list-style-type: none"> • Original or developed methodological solutions which can be applied to statistical analyses and serve to improve their quality • Planning statistical surveys
Statystyka w praktyce / Statistics in practice	
<ul style="list-style-type: none"> • Nowatorskie zastosowania narzędzi i modeli statystycznych oraz analiza i ocena statystyczna zjawisk społeczno-gospodarczych i innych, prowadzona w szczególności na danych pochodzących z zasobów statystyki publicznej • Wykorzystanie narzędzi informatycznych do uzyskiwania i przetwarzania informacji statystycznych, naliczania i kontroli ujawniania danych oraz prezentacji i rozpowszechniania danych wyników 	<ul style="list-style-type: none"> • Innovative applications of statistical tools and models as well as statistical analysis and assessment of social, economic and other phenomena, performed mainly on data produced by official statistics • Application of IT tools to obtain and process statistical information, to calculate data and control the statistical disclosure, and to present and disseminate output data
Studia interdyscyplinarne. Wyzwania badawcze / Interdisciplinary studies. Research challenges	
<ul style="list-style-type: none"> • Wyzwania badawcze wynikające z rosnących potrzeb użytkowników danych statystycznych i wymagające stosowania rozwiązań z różnych dziedzin nauki • Problematyka wykraczająca poza konwencjonalne tematy związane ze statystyką • Wyniki badań prowadzonych w obrębie różnych dyscyplin z wykorzystaniem metod statystycznych 	<ul style="list-style-type: none"> • Research challenges resulting from growing needs of statistical data users and requiring the application of solutions from various fields of science • Problems beyond the conventional thematic scope related to statistics • Results of research carried out in the framework of several fields of science using statistical methods
Edukacja statystyczna / Statistical education	
<ul style="list-style-type: none"> • Metody i efekty nauczania statystyki na wszystkich poziomach edukacji • Popularyzacja myślenia statystycznego i rzetelnego posługiwania się informacjami statystycznymi 	<ul style="list-style-type: none"> • Methods and effects of statistical education at all levels of education • Popularisation of statistical thinking and of diligent use of statistical information
Spisy powszechnne – problemy i wyzwania / Issues and challenges in census taking	
<ul style="list-style-type: none"> • Rozwiązania metodologiczne i organizacyjne możliwe do zastosowania podczas przygotowywania i prowadzenia spisów • Praktyczne aspekty związane z gromadzeniem i udostępnianiem danych ze spisów, w tym dotyczące obciążenia odpowiedzi i ochrony tajemnicy statystycznej 	<ul style="list-style-type: none"> • Methodological and organisational solutions which may be implemented in the process of preparing and conducting censuses • Practical aspects of collecting and disseminating census data, including those related to response burden and the protection of statistical confidentiality
Z dziejów statystyki / From the history of statistics	
<ul style="list-style-type: none"> • Historia prowadzenia obserwacji statystycznych, w tym rozwój metodologii i narzędzi oraz instytucji statystycznych w Polsce i za granicą • Życie i osiągnięcia wybitnych statystyków 	<ul style="list-style-type: none"> • History of statistical observations, including the development of statistical methodologies, tools and institutions in Poland and abroad • Life and achievements of prominent statisticians
In memoriam	
<ul style="list-style-type: none"> • Nekrologi i artykuły wspomnieniowe o osobach zasłużonych dla statystyki 	<ul style="list-style-type: none"> • Obituaries and articles remembering important people in the world of statistics
Dyskusje. Recenzje. Informacje / Discussions. Reviews. Information	
<ul style="list-style-type: none"> • Dyskusje i polemiki • Sprawozdania z konferencji naukowych • Recenzje książek oraz zestawienia nowości wydawniczych GUS 	<ul style="list-style-type: none"> • Discussions and polemics • Reports from scientific conferences • Book reviews and compilations of Statistics Poland's new publications