

Cena 15,00 zł
(VAT 8%)

Indeks 381306
e-ISSN 2543-8476
PL ISSN 0043-518X

WIADOMOŚCI STATYSTYCZNE

THE POLISH STATISTICIAN

WRZESIEŃ / SEPTEMBER
ROCZNIK / VOLUME 70

2025 | 9

GLÓWNY URZĄD STATYSTYCZNY
STATISTICS POLAND

POLSKIE TOWARZYSTWO STATYSTYCZNE
POLISH STATISTICAL ASSOCIATION



WIADOMOŚCI STATYSTYCZNE

THE POLISH STATISTICIAN

WRZESIEŃ / SEPTEMBER
ROCZNIK / VOLUME 70

2025 | 9 (772)

ZESPÓŁ REDAKCYJNY / EDITORIAL BOARD

Rada Naukowa / Science Board

prof. dr hab. Tomasz Panek – przewodniczący/Chairman (Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Polska), Prof. Samuel Kobina Annim (University of Cape Coast, Ghana), Prof. Anthony Arundel (Maastricht University, Holandia), Atanas Atanasov, PhD, Assoc. Prof. (University of National and World Economy, Bułgaria), Eric Bartelsman, PhD, Assoc. Prof. (Vrije Universiteit Amsterdam, Holandia), Maria Teresa Borges, PhD, Assoc. Prof. (University of the Azores, Portugalia), prof. dr hab. Czesław Domański (Uniwersytet Łódzki, Polska), prof. dr hab. Elżbieta Gołata (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Polska), Semen Matkovskyy, PhD, Assoc. Prof. (Ivan Franko National University of Lviv, Ukraina), prof. dr hab. Włodzimierz Okrasa (Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie, Polska), prof. dr hab. Józef Oleński (Polskie Towarzystwo Statystyczne, Polska), Juan Manuel Rodríguez Poo, PhD, Assoc. Prof. (University of Cantabria, Hiszpania), dr Dominik Rozkrut (Uniwersytet Szczeciński, Polska), Iveta Stankovičová, BEng, PhD, Assoc. Prof. (Comenius University in Bratislava, Słowacja), Georges-Simon Ulrich, PhD, Assoc. Prof. (Zurich University of Applied Sciences in Business Administration, Szwajcaria), prof. dr hab. Marek Walesiak (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Polska)

Rada Konsultacyjna / Advisory Board

Tudorel Andrei, PhD, Assoc. Prof. (Bucharest Academy of Economic Studies, Rumunia), mgr Renata Biela (Główny Urząd Statystyczny, Polska), dr hab. Grażyna Dehnel, prof. UEP (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Polska), dr Jacek Kowalewski (Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Polska), Prof. Steve MacFeely (University College Cork, Irlandia), prof. dr hab. Mateusz Pipień (Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Polska), Marek Rojček, BEng, PhD (University of Economics, Prague, Czechy), Anna Shostya, PhD, Assoc. Prof. (Pace University in New York, Stany Zjednoczone), Athanasios Thanopoulos, PhD (Hellenic Statistical Authority, Grecja)

Redakcja / Editorial Team

redaktor naczelny / Editor-in-Chief: dr hab. Marek Cierpiął-Wolan, prof. UR (Uniwersytet Rzeszowski, Polska)
zastępca redaktora naczelnego / Deputy Editor-in-Chief: dr hab. Andrzej Młodak, prof. UK (Uniwersytet Kaliski im. Prezydenta Stanisława Wojciechowskiego, Polska)
redaktorzy tematyczni / Thematic Editors: dr Marek Pieniążek (Główny Urząd Statystyczny, Polska), dr Xawery Stańczyk (Uniwersytet Łódzki, Polska), dr hab. Małgorzata Tarczyńska-Łuniewska, prof. US (Uniwersytet Szczeciński, Polska), dr Wioletta Wrzaszcz (Instytut Ekonomiki Rolnictwa i Gospodarki Żywnościowej – Państwowy Instytut Badawczy, Polska), dr inż. Agnieszka Zgierska (Główny Urząd Statystyczny, Polska)

ADRES REDAKCJI I KONTAKT / EDITORIAL OFFICE ADDRESS AND CONTACT

Główny Urząd Statystyczny / Statistics Poland, al. Niepodległości 208, 00-925 Warszawa, ws.stat.gov.pl
sekretarz redakcji / Editorial Secretary: Małgorzata Zygmunt
redaktor zarządzający systemem redakcyjnym / Editorial System Managing Editor: Krzysztof Sztafa
e-mail: redakcja.ws@stat.gov.pl, tel./phone +48 22 608 32 25

Redakcja językowa: Wydział Czasopism Naukowych, Departament Opracowań Statystycznych, Główny Urząd Statystyczny

Language editing: Scientific Journals Division, Statistical Products Department, Statistics Poland

Redakcja techniczna, skład i łamanie, opracowanie materiałów graficznych i korekta:

Zakład Wydawnictw Statystycznych – zespół pod kierunkiem Macieja Adamowicza

Technical editing, typesetting, preparation of graphic materials and proofreading:

Statistical Publishing Establishment – team supervised by Maciej Adamowicz

Wersja elektroniczna, stanowiąca wersję pierwotną czasopisma, jest dostępna na ws.stat.gov.pl
The primary version of the journal, issued in electronic form, is available at ws.stat.gov.pl

© Copyright by Główny Urząd Statystyczny and the authors, some rights reserved. CC BY-SA 4.0 licence 



Zakład Wydawnictw
Statystycznych

Druk i oprawa / Printed and bound by:

Zakład Wydawnictw Statystycznych / Statistical Publishing Establishment
al. Niepodległości 208, 00-925 Warszawa, zws.stat.gov.pl

Informacje w sprawie sprzedaży i prenumeraty czasopisma / Sales and subscription of the journal:

Zakład Wydawnictw Statystycznych / Statistical Publishing Establishment

e-mail: zws-sprzedaz@stat.gov.pl, tel./phone +48 22 608 32 10, +48 22 608 38 10

SPIS TREŚCI

CONTENTS

Od redakcji	IV
From the Editorial Team	
Studia metodologiczne	
Methodological studies	
Marek Leśniewicz	
Propozycja nowej metody testowania ciągów losowych	1
A proposal for a new method of testing random sequences	
Statystyka w praktyce	
Statistics in practice	
Kamila Trzcińska, Małgorzata Ćwiek	
Comparison of three-parameter models of income distribution in selected European countries	34
Porównanie trójparametrycznych modeli rozkładu dochodów w wybranych krajach europejskich	
Z dziejów statystyki	
From the history of statistics	
Czesław Domański, Alina Jędrzejczak, Jerzy T. Kowaleski	
Maciej Miechowita – polski pionier państwowznawstwa	57
Maciej Miechowita – Polish pioneer of state studies	
Dyskusje. Recenzje. Informacje	
Discussions. Reviews. Information	
Joanna Sadowy	
Wydawnictwa GUS. Sierpień 2025	68
Publications of Statistics Poland. August 2025	
Dla autorów	71
For the authors	
Działy „WS” – tematyka artykułów	90
WS sections – topics of the articles	

OD REDAKCJI

We wrześniowym numerze „Wiadomości Statystycznych. The Polish Statistician” proponujemy Państwu lekturę trzech artykułów naukowych.

Wydanie otwiera praca dr. hab. Marka Leśniewicza, prof. WIŁ-PIB, pt. *Propozycja nowej metody testowania ciągów losowych*. Autor odnotowuje, że wycofanie w 2022 r. rekomendacji dla zestawu testów wykorzystywanych do badania ciągów losowych przez amerykański National Institute of Standards and Technology zmusiło badaczy do wypracowania nowych narzędzi pomiaru. Przedstawia autorską metodę testowania – obiektywną i wolną od specyficznych właściwości oraz ograniczeń innych znanych zestawów testów, opartą na rzeczywistych właściwościach ciągów losowych o dyskretnym, równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa. To metoda jednoparametryczna, która teoretycznie nie zależy od liczebności próby. Wynik weryfikacji zaledwie jednej próby ciągu losowego o odpowiedniej liczebności jednoznacznie kwalifikuje lub dyskwalifikuje go jako realizację ciągu zmiennych losowych o domyślnie referencyjnych właściwościach i parametrach probabilistycznych. Metoda została opracowana jako narzędziowe wsparcie projektu kwantowego mikrofalowego generatora o wydajności 1 Gbit/s, skonstruowanego w Wojskowym Instytucie Łączności. O użyteczności prezentowanego podejścia świadczy fakt, że znalazło ono zastosowanie w procesie ustawowej certyfikacji prostszego generatora o wydajności 10 Mbit/s, przeprowadzonym z pozytywnym skutkiem przez Służbę Kontrwywiadu Wojskowego.

W artykule *Comparison of three-parameter models of income distribution in selected European countries* dr Kamila Trzcinińska i dr Małgorzata Ćwiek porównują wybrane trójparametryczne modele rozkładu dochodów: Singha-Maddala, Daguma oraz Zengi pod względem dopasowania do danych empirycznych. Opierają się na danych za 2016 r. zaczerpniętych z Europejskiego Badania Jakości Życia dla sześciu krajów europejskich, które reprezentują gospodarki różnej wielkości i na różnym poziomie rozwoju. Analizę przeprowadzają zarówno dla całego kraju, jak i oddzielnie dla mieszkańców miast (małych i średnich oraz dużych) i obszarów wiejskich. Do porównania oszacowanych rozkładów wykorzystują współczynnik podobieństwa rozkładów i indeks Mortary. Badają również odchylenia statystyk opisowych opartych na rozkładach teoretycznych od wartości empirycznych. We wnioskach wskazują, że najlepsze dopasowanie do danych empirycznych wykazał model Zengi, ale charakterystyki opisowe rozkładu dochodów oszacowane na podstawie rozkładu Daguma cechowały się znacznie niższą amplitudą odchyżeń. Niemniej nawet bardzo wysoka dobroć dopasowania do danych empirycznych – jak zaznaczają – nie gwarantuje, że teoretyczne charakterystyki opisowe rozkładu będą miały takie same wartości jak charakterystyki empiryczne.

Prof. dr hab. Czesław Domański, prof. dr hab. Alina Jędrzejczak i dr hab. Jerzy T. Kowaleski w pracy *Maciej Miechowita – polski pionier państwowznawstwa* przybliżają czytelnikom biografię i działalność polskiego polihistora: lekarza, geografa i historyka z przełomu XV i XVI w. Analizują dzieła Miechowity, w których można odnaleźć elementy państwowznawstwa: *Kronikę Polaków* oraz *Traktat o dwóch Sarmacjach, Azjatyckiej i Europejskiej, i o tym, co się w nich znajduje*. Państwowznawstwo bowiem, wraz z arytmetyką polityczną, doprowadziło do ukształtowania się statystyki jako samodzielnej dyscypliny naukowej.

W numerze znajdują Państwo także przegląd najnowszych publikacji GUS, przygotowany przez Joannę Sadowy.

Życzymy inspirującej lektury.

FROM THE EDITORIAL TEAM

The September issue of *Wiadomości Statystyczne. The Polish Statistician* features three scientific articles.

The publication opens with a paper by Marek Leśniewicz, PhD, DSc, Professor at the Military Communications Institute – National Research Institute, entitled *A proposal for a new method of testing random sequences*. The author notes that due to the fact that the US National Institute of Standards and Technology withdrew in 2022 the recommendations for a test suite to examine random sequences, researchers were forced to develop new measurement tools. He presents his own method which is objective and free from the specific properties and limitations of other well-known test sets. It is based on the real properties of random sequences with a discrete, uniform probability distribution. It is a single-parameter method, theoretically independent of the sample size. The result of verifying only one sample of a random sequence of an appropriate size unambiguously qualifies or disqualifies it as a sequence of random variables with default reference properties and probabilistic parameters. The method was developed as a tool to support the design of a 1Gbit/s quantum microwave generator constructed at the Military Communications Institute. The usefulness of the presented approach is evidenced by the fact that it was applied in the statutory certification process of a simpler generator with a capacity of 10Mbit/s, carried out with positive results by the Military Counterintelligence Service.

In the article by Kamila Trzcńska, PhD, and Małgorzata Ćwiek, PhD, titled *Comparison of three-parameter models of income distribution in selected European countries*, the authors compare selected three-parameter models of income distribution, namely the Singh-Maddala, Dagum and Zenga models in terms of their goodness-of-fit to empirical data. They use data for 2016 from the European Quality of Life Survey for six European countries representing economies of different sizes and levels of development. The analysis is carried out for both the whole country and separately for the residents of cities, small- and medium-sized towns and rural areas. They use the distribution similarity coefficient and the Mortara index to compare the estimated distributions. They also examine the deviations of descriptive statistics based on theoretical distributions from the empirical values. They conclude that the Zenga model proved the best fit to the empirical data, but the descriptive characteristics of income distribution estimated on the basis of the Dagum distribution showed a significantly lower amplitude of deviations. The authors point out, however, that even a very high goodness of fit to empirical data does not guarantee that the theoretical descriptive characteristics of the distribution will have the same values as the empirical characteristics.

Czesław Domański, PhD, DSc, ProfTit, Alina Jędrzejczak, PhD, DSc, ProfTit, and Jerzy T. Kowaleski, PhD, DSc, in their work titled *Maciej Miechowita – Polish pioneer of state studies*, introduce the biography and activity of this Polish polymath: a physician, geographer and historian from the turn of the 15th and 16th centuries. They analyse Miechowita's works in which elements of state studies can be found, namely *The Chronicle of the Poles* and *The Treatise on the Two Sarmatias of Asia and Europe*. It is because state studies, together with political arithmetic, led to the development of statistics as an independent scientific discipline.

This issue also presents an overview of the latest Statistics Poland publications, prepared by Joanna Sadowy.

We hope you find our publication inspiring.

Propozycja nowej metody testowania ciągów losowych

Marek Leśniewicz^a

Streszczenie. W 2022 r. amerykański National Institute of Standards and Technology wycofał swoje rekomendacje dla zestawu testów do badania losowości ciągów (*A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications*), co pozbawiło środowisko badaczy i użytkowników formalnie uznawanego narzędzia weryfikacji tych ciągów. Celem artykułu jest przedstawienie propozycji nowej, autorskiej metody testowania ciągów losowych, obiektywnej i wolnej od specyficznych właściwości i ograniczeń innych znanych zestawów testów. Metoda została oparta na rzeczywistych właściwościach ciągów losowych o dyskretnym, równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa i wykorzystuje elementarne parametry tych ciągów opisywane przez probabilistykę, statystykę i teorię informacji. W przeciwieństwie do dotychczas stosowanych zestawów testów proponowana metoda jest jednoparametryczna, teoretycznie nie zależy od liczebności próby, a wynik weryfikacji zaledwie jednej próby ciągu losowego o odpowiedniej liczebności jednoznacznie kwalifikuje bądź dyskwalifikuje go jako realizację ciągu zmiennych losowych o domyślnie referencyjnych właściwościach i parametrach probabilistycznych. Metoda została opracowana jako narzędziowe wsparcie projektu kwantowego mikrofalowego generatora ciągów losowych o wydajności 1 Gbit/s, skonstruowanego w ramach własnych prac statutowych w Wojskowym Instytucie Łączności.

Słowa kluczowe: ciąg losowy, rozkład prawdopodobieństwa, test chi-kwadrat

JEL: C12, C13, C15

A proposal for a new method of testing random sequences

Abstract. The withdrawal of the recommendation for a test suite to the randomness of sequences by the US National Institute of Standards and Technology in 2022 (*A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications*) deprived researchers and users of this tool of a formally recognised and thus commonly accepted instrument for verifying such sequences. The aim of this paper is to present the author's novel method of random sequence testing, which is objective and free from the specific properties and limitations of other well-known test sets. The method was based on real properties of random sequences with a discrete uniform probability distribution. It uses the elementary parameters of these sequences, described by the probability theory, statistics and the information theory. In contrast to the sets of tests used so far, the proposed method is single-parameter. Theoretically, it does not depend on the sample size, and the result of the verification of only one test of a random sequence of an appropriate size unambiguously qualifies or disqualifies it as the implementation of a sequence of random variables with default reference properties and probabilistic parameters. The method was developed as a tool to support the project of a quantum microwave random sequence generator with the capacity of 1 Gbit/s. It was constructed as part of the statutory work of the Military Communications Institute.

Keywords: random sequence, probability distribution, chi-square test

^a Wojskowy Instytut Łączności – Państwowy Instytut Badawczy, Polska / Military Communications Institute – National Research Institute, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5505-1268>.
E-mail: m.lesniewicz@wil.waw.pl.

1. Wprowadzenie

Ciągi losowe są obecne w wielu dziedzinach nauki i techniki, np. kryptografii, telekomunikacji, cyfrowym przetwarzaniu sygnałów, technice algorytmów randomizowanych, statystyce, obliczeniach numerycznych czy symulacjach stochastycznych. We wszystkich tych zastosowaniach powinno się używać ciągów doskonale losowych (ang. *perfectly random sequences*), tzn. bezwarunkowo spełniających ściśle określone teoretyczne wymagania probabilistyczne (nie statystyczne), oraz prawdziwie losowych, tzn. charakteryzujących się nieprzewidywalnością (ang. *unpredictability*) wartości kolejnych elementów ciągu i niepowtarzalnością (ang. *unrepeatability*) w sensie prawdopodobieństwa ponownej realizacji, równego 2^{-m} , gdzie m jest liczebnością dowolnego podciągu w danej próbie ciągu.

Z tych względów w nauce i technice w zasadzie nie stosuje się już generowanych algorytmicznie ciągów pseudolosowych. W przypadku kryptografii powód jest oczywisty, ujęty w ściśle normy prawne, ale nawet w zastosowaniach niewymagających nieprzewidywalności stwierdza się, że wyniki np. symulacji stochastycznych są niedokładne z powodu niskiej jakości statystyk ciągów generowanych algorytmicznie. Autorzy metod generowania ciągów pseudolosowych mają tego pełną świadomość i przyznają, że „zbudowanie generatora ciągu, który przejdzie wszystkie testy statystyczne, jest nierealizowalnym marzeniem” (L’Ecuyer, 2012, s. 1). Wynika to z tego, że funkcje generujące ciągi zwykle nie są intencjonalnie konstruowane zgodnie z zaawansowanymi zasadami algebry i teorii liczb, nie mają dowiedzionych właściwości i parametrów statystycznych, bywają natomiast skrajnie upraszczane, co – zwiększając potencjalną szybkość generowania ciągów – powoduje ich wynikową degradację statystyczną. Z tych powodów duża część generatorów liczb losowych w komputerowych pakietach matematycznych jest oceniana jako nienadająca się do zastosowań dużej wagi.

Nie oznacza to, że wszystkie ciągi pseudolosowe są złe – zaawansowane funkcje kryptograficzne generują ciągi w zasadzie nieodróżnialne od doskonale losowych (ang. *looks like random*)¹. Problemem pozostaje jednak niepowtarzalność w sensie unikatowości prób używanych np. do obliczeń numerycznych – jeśli wielokrotnie używa się tych samych prób, to pomimo ich dobrych statystyk wyniki wielu obliczeń będą dotyczyły jednej realizacji ciągu i w procesie optymalizacji algorytmów obliczeń mogą się do niej dopasować lub z nią skorelować, a w przypadku innej realizacji mogą być już inne. Ten sam problem dotyczy losowego wyboru reprezentacji w badaniach statystycznych i błędu losowania (ang. *sampling error*), ponieważ „w zastosowaniach wnioskowania statystycznego coraz częściej nie zostaje spełnione fundamentalne założenie o posiadaniu przez badacza próby losowej (probabilistycznej)”, a sama „duża

¹ Jest to pokazane w części 8.

liczebność próby, której doboru dokonano za pomocą techniki nieprobabilistycznej, nie może stanowić alternatywy dla wyboru losowego”, zatem próby „powinny być generowane przez mechanizm losowy” (Szreder, 2022, s. 1; zob. też Szreder i Kozłowski, 2024).

Możliwe jest jednak uzyskiwanie prawdziwie losowych i bliskich matematycznej doskonałości ciągów z generatorów sprzętowych TRNG (ang. *true random number generator*), które wytwarzają intencjonalnie nieprzewidywalne i niepowtarzalne ciągi o referencyjnych statystykach, wynikających z modelowania stochastycznych właściwości i parametrów zjawisk losowych, które są ich źródłami. Takie generatory uznaje się za wzorcowe źródła ciągów doskonale losowych, ponieważ doskonałość wytwarzanych przez nie ciągów wynika nie tyle z testowania, ile z dowiedzionego bezpieczeństwa kryptograficznego. Polega ono na analitycznym wykazaniu, że w racjonalnym czasie analizy statystycznej żaden ciąg wytwarzany przez generator nie okaże nawet oznaki nielosowości, a ponieważ jego ewentualne usterki techniczne, zgodnie z obecnie obowiązującymi zaleceniami (International Telecommunication Union, 2019), są zidentyfikowane za pomocą mechanizmów autotestowania, to nigdy nie wygeneruje on ciągu nielosowego. Ów racjonalny czas jest przyjmowany jako dotychczasowy czas istnienia Wszechświata.

Generatory TRNG są trudne do skonstruowania i kosztowne w produkcji, ale w przypadku kryptograficznego bezpieczeństwa państwa nikt nie pyta o problemy technologiczne i związane z nimi koszty, tylko o to, czy dany generator ma certyfikat bezpieczeństwa służby ochrony państwa, który formalnie gwarantuje bezwarunkowe spełnienie wszystkich wymagań matematycznych w określonym czasie i dla dowolnej liczebności wygenerowanych ciągów w założonych, klimatyczno-mechanicznych i elektromagnetycznych warunkach pracy (Leśniewicz, 2009).

Jednak niezależnie od tego, czy dany generator otrzymał dowód bezpieczeństwa i potwierdzający go certyfikat, użytkownik generowanych przezeń ciągów powinien mieć możliwość weryfikacji ich losowości. Celem niniejszej pracy jest zatem przedstawienie propozycji nowej, autorskiej metody testowania ciągów losowych, obiektywnej i wolnej od specyficznych właściwości i ograniczeń dotychczas stosowanych testów losowości.

2. Probabilistyczny model ciągu losowego

Generowanie ciągów losowych sprowadza się do wytwarzania ciągów binarnych o dyskretnym, równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa. Nie ma sprzętowych generatorów ciągów o innych rozkładach (Jacak i in., 2021), a bardziej złożone rozkłady uzyskuje się przez numeryczne przetwarzanie ciągów binarnych w ciągi o rozkładzie normalnym i innych (Sulewski, 2019).

Probabilistyczny model ciągu doskonale losowego o takim rozkładzie wygląda tak. Dana jest przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{0, 1\}$ na σ -ciele $\mathcal{F} = 2^\Omega = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\}$ i prawdopodobieństwach $P(0) = P(1) = 1/2$. Modelem ciągu doskonale losowego jest zatem ciąg N -wymiarowych, niezależnych zmiennych losowych X_1, \dots, X_N , określonych na przestrzeni $\Omega = \{0, 1\}^N$ i przyjmujących wartości ze zbioru $\{0, 2^N - 1\}$ o dyskretnym, równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa $P(X_1, \dots, X_N) = 1/2^N$.

Ciąg zmiennych losowych nie jest jednak ciągiem losowym w sensie arytmetycznego ciągu liczb. Tak rozumiany ciąg jest realizacją ciągu zmiennych losowych i jego opis jest pochodną opisu probabilistycznego, zasadniczo w dziedzinie statystyki matematycznej. Można zatem powiedzieć, że probabilistyka opisuje ciąg losowy *a priori* i taki ciąg jest „niemierzalny”, ponieważ jest opisany prawdopodobieństwami zmiennych losowych $P(X_1, \dots, X_N)$ jako miarami przewidywalności. Natomiast arytmetyczny ciąg liczb jest realizacją ciągu losowego *a posteriori*, tzn. po zapisaniu próby o danej liczebności, charakteryzującej się statystykami z próby, po obliczeniu średnich częstości realizacji N -wymiarowych zmiennych losowych X_1, \dots, X_N , jako $p(X_1, \dots, X_N)$. Wartości $P(X_1, \dots, X_N)$ i $p(X_1, \dots, X_N)$ są zbieżne, zgodnie z prawami wielkich liczb, ale nigdy nie są sobie równe (Feller, 2006).

Chcąc zatem skonstruować generator ciągów losowych spełniających wymagania probabilistyczne, a następnie mierzyć i analizować wytwarzane przezeń ciągi, trzeba rozdzielić probabilistykę i statystykę, ponieważ właściwości i parametry tych ciągów *a priori* i *a posteriori* znacząco się różnią.

Probabilistyczna analiza prawdopodobieństw jest względnie prosta w przypadku liczby wymiarów zmiennych losowych $N = 1$ lub co najwyżej $N = 2$ (dalej w artykule używana będzie forma „zmiennych losowych N -wymiarowych”). W sytuacji kiedy niezbędna jest analiza rozkładów dla np. $N = 16$, opisanych $2^N = 65\,536$ różnymi prawdopodobieństwami, staje się ona nie tyle niemożliwa, ile bardzo pracochłonna i żmudna. Aby obejść tę trudność, Shannon (1949) wprowadził pojęcie *entropii informacyjnej* ciągu jako globalnej miary jego losowości², która sprowadza nawet najbardziej złożony N -wymiarowy rozkład zmiennej losowej X_1, \dots, X_N do jednoparametrycznej, więc prostej i wygodnej, ale już nieodwracalnej wartości

$$H(X_1, \dots, X_N) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k P(X_i) \log_2 P(X_i), \quad (1)$$

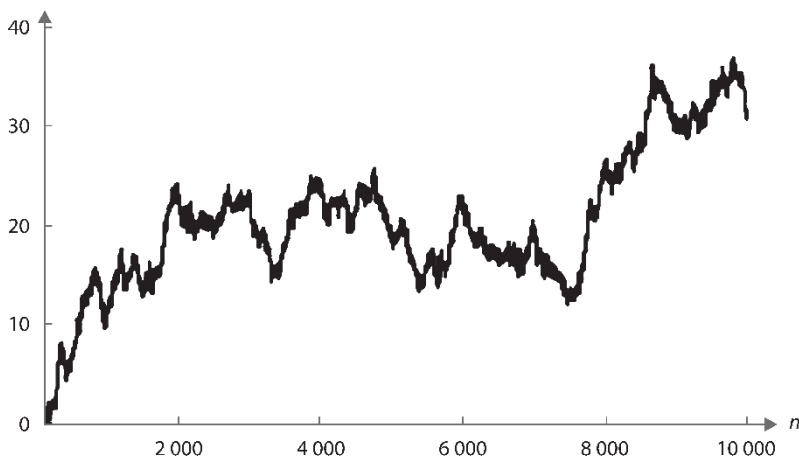
² Owo wprowadzenie miało charakter heurystyczny i 75 lat temu nikt się nie spodziewał, że intuicyjnie zaproponowana zależność stanie się ważnym narzędziem w tak różnych dziedzinach nauki i techniki, jak teoria układów dynamicznych czy teoria kodowania.

gdzie $P(X_i)$ jest prawdopodobieństwem i -tej zmiennej losowej X_i , a $k = 2^N$ stanowi liczbę potencjalnych realizacji tej zmiennej, którą można utożsamiać z liczbą stopni swobody df .

Te dwa podejścia – probabilistyczne i teorioinformacyjne – są w zasadzie wystarczające do pełnej analizy losowości ciągów dowolnie wymiarowych zmiennych losowych. Problem zaczyna się jednak w przypadku analizowania ich realizacji, które okazują się pełne pozornie najdziwniejszych właściwości i parametrów, zwanych *błądzeniem przypadkowym*, choć w pełni opisanych i uzasadnionych matematycznie (Bobbrowski, 2002; Feller, 2006), a ponadto zweryfikowanych pomiarowo (Leśniewicz, 2009).

Wykr. 1. Zjawisko błędzenia przypadkowego – ciąg rzutów monetą

$$\text{miara prowadzenia} = n(2 \pi n)^{-1/2}$$



Źródło: Feller (2006).

Najwięcej trudności przysparza odpowiedź na najprostsze pytanie: czy w ciągu n -elementowym, stanowiącym realizację ciągu niezależnych zmiennych losowych o prawdopodobieństwie $P(X) = 1/2$, występuje równowaga elementów, umownie nazywanych $\{0\}$ i $\{1\}$? W praktyce – a teoria w pełni to uzasadnia – taka równowaga występuje bardzo rzadko, czego przykładem mogą być wyniki rzutu monetą, zilustrowane na wykr. 1. Wielu matematyków rzucało nią nawet kilkadziesiąt tysięcy razy i przekonało się, że teoria mówi prawdę – co Feller (2006), już po 10 000 takich osobistych doświadczeń, skomentował następująco: „niewielu ludzi uwierzy, że uczciwa moneta może dać nedorzeczny ciąg, w którym zmiana prowadzenia nie nastąpi w ciągu milionów kolejnych doświadczeń, jest to jednak zjawisko raczej powszechne dla dobrych monet” (s. 87). „Dobrych monet”, czyli zmiennych losowych

o prawdopodobieństwach „orła” i „reszki” równych $P(O) = P(R) = 1/2$. Ten przykład pokazuje, że ciągi losowe nie lubią stanu równowagi i zwykle w dłuższych przedziałach utrzymują prowadzenie po jednej ze stron. Jeśli jednak moneta jest „dobra”, to ciąg wraca do stanu równowagi, by jednak szybko go opuścić i dalej błędzić przypadkowo, zwykle już po drugiej stronie realizacji zmiennej losowej, co zgodnie z prawami wielkich liczb sprowadza statystyki z próby $p(X)$ do wartości definicyjnego prawdopodobieństwa $P(X) = 1/2$. Zjawisko to jest ściśle opisane wieloma wzajemnie dopełniającymi się zależnościami probabilistycznymi, m.in. prawami arcusa sinusa czy prawami iterowanego logarytmu (Feller, 2006).

Powyższy przykład – który dotyczy każdego generatora i wytwarzanych przezeń ciągów losowych – wskazuje, że prawdopodobieństwa $P(X_1, \dots, X_N) = 1/2^N$ odpowiadają średnim częstościom realizacji N -wymiarowych zmiennych losowych X_1, \dots, X_N , jako $p(X_1, \dots, X_N)$, ale dopiero dla ciągów o bardzo dużej liczebności, zgodnie z prawami wielkich liczb. W związku z tym matematycznie nie ma sensu pytanie, czym jest „liczba losowa” i czy np. liczba 0110 1000 0011 1000 1101 1001 0001_B = 109 284 753_D jest czy nie jest losowa. Zasadne i weryfikowalne jest natomiast pytanie w sensie hipotezy, czy konkretna realizacja ciągu losowego o liczebności co najmniej 1 000 000 elementów może być realizacją doskonale losowego ciągu N -wymiarowych zmiennych losowych o $P(X_1, \dots, X_N) = 1/2^N$.

Wynika z tego, że nie ma również sensu badanie próby ciągu $n = 100$ elementów, zawierającego np. kolejnych $m = 20$ elementów o wartości $\{0\}$ lub $\{1\}$, i arbitralne stwierdzenie, że z tego powodu jest on nielosowy. Jeśli ta próba jest podciągiem ciągu doskonale losowego o liczebności 1 GB, tzn. liczącego $n = 8 \times 2^{30} = 8\,589\,934\,592$ elementy, to w takiej próbie z natury rzeczy zdarzają się realizacje o $m = 20$ kolejnych elementach o wartościach $\{0\}$ lub $\{1\}$, ponieważ prawdopodobieństwo ich wystąpienia wynosi $P = 2^{-m} = 2^{-20} = 1/1\,048\,576$. Jak zatem łatwo obliczyć, w próbie ciągu o takiej liczebności występuje ich średnio po $n \times 2^{-m} = 8192$, typowo od 8000 do 8400, więc nie tylko mogą, ale muszą występować w takim właśnie przedziale; w przeciwnym wypadku na pewno nie jest to próba ciągu doskonale losowego. Mówiąc obrazowo – im próba ciągu będzie liczebniejsza, tym większe prawdopodobieństwo, że znajdą się w niej prawie wszystkie potencjalne realizacje zmiennych losowych o dowolnie dużych wymiarach N , a w próbie ciągu doskonale losowego o liczebności 1 GB można spodziewać się incydentalnie nawet 32-elementowych podciągów o wartościach $\{0\}$ lub $\{1\}$.

Wniosek z tej analizy jest taki, że badanie losowości ciągu ma sens tylko dla prób o dużej, najlepiej możliwie największej technicznie liczebności i dla zmiennych losowych o jak największych wymiarach N . Założenie to stoi w sprzeczności z założeniami wykorzystania dotychczas stosowanych testów, takich jak testy National Institute of Standards and Technology (NIST; Rukhin i in., 2010), przewidujących badania ciągów o liczebności rzędu $n = 100$ czy nawet 10 000 elementów, a ponadto dla zmiennych

losowych o małej liczbie wymiarów N . Losowość tak mało liczebnych prób jest nieweryfikowalna, zakres badań nieadekwatny do potencjalnych nielosowości, a powtarzanie badań na podobnie mało liczebnych próbach może tylko wprowadzać w błąd z powodu niepowtarzalności wyników pomiarów.

3. Rzeczywisty ciąg losowy

Jak już wspomniano, przykład uczciwej monety mogącej dać niedorzeczny ciąg, w którym zmiana prowadzenia nie nastąpi w ciągu milionów kolejnych doświadczeń, został dokładnie opisany analitycznie wieloma zależnościami probabilistycznymi. W dalszej części artykułu wykorzystane są jednak tylko te zależności, które dotyczą ciągów doskonale losowych i znajdują zastosowanie w proponowanej tutaj metodzie.

Suma doskonale losowego ciągu N -wymiarowych zmiennych losowych X_1, \dots, X_N jest w pełni opisywana liczebnością elementów n , prawdopodobieństwami $P(X_1, \dots, X_N) = 1/2^N$ oraz unormowaną wartością oczekiwaną $E(X_1, \dots, X_N) = 1/2^N$ i unormowaną wariancją $V(X_1, \dots, X_N) = [P(X_1, \dots, X_N) (1 - P(X_1, \dots, X_N))] N / n = 1/2^N (1 - 1/2^N) N / n$, gdzie n / N stanowi liczebność realizacji zmiennych losowych N -wymiarowych.

Wariancja $V(X_1, \dots, X_N)$, mimo że malejąca w funkcji liczebności n , nigdy nie osiąga wartości zerowej, a jej zmniejszanie się jest relatywnie wolne – w relacji $1/n$. Z tak rozumianej wariancji można wyprowadzić zależność na odchylenie standardowe $\sigma(X_1, \dots, X_N) = V(X_1, \dots, X_N)^{1/2}$, ale nie ma ono intuicyjnej ilościowej interpretacji liczbowej. Taką ilościową – w sensie pomiarowym – interpretację ma natomiast moduł średniego odchylenia od wartości oczekiwanej $E(X_1, \dots, X_N) = P(X_1, \dots, X_N) = 1/2^N$, równy dla dowolnej N -wymiarowej zmiennej losowej (Leśniewicz, 2009):

$$\begin{aligned} \alpha(X_1, \dots, X_N)_{\delta r} &= \left| \frac{n_i N}{n} - E(X_1, \dots, X_N) \right| = \left| \frac{n_i N}{n} - \frac{1}{2^N} \right| \\ &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi} V(X_1, \dots, X_N)} = \sqrt{\frac{(1 - 1/2^N) N}{2^{N-1} \pi n}}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie n_i stanowi liczbę realizacji każdej ze zmiennych losowych X_1, \dots, X_N .

Znak \cong wynika z przybliżenia Stirlinga dla pewnych zależności kombinatorycznych, więc zależność jest dokładna dla dużych n . Odchylenie standardowe i moduł średniego odchylenia wiąże relacja $\sigma(X_1, \dots, X_N) = (\pi/2)^{1/2} \alpha(X_1, \dots, X_N)$. Wszystkie te odchylenia mają źródła nie w potencjalnej nielosowości ciągu, lecz w naturalnym wpływie niezerowej wariancji ciągu o skończonej liczebności n i podobnie jak wariancji nie można ich zmniejszać w żaden inny sposób niż poprzez zwiększenie liczebności n .

W praktyce te odchylenia mają bardzo stabilny charakter – w zasadzie nigdy nie są zerowe, a ich wartości w każdej odpowiednio liczebnej próbie są bliskie zależności teoretycznej, co dość czytelnie ilustruje wyk. 1. Można też zauważyć, że zbieżność

tych wartości zależy od wymiaru zmiennej losowej N i przykładowo dla $N = 1$ zawierają się one zwykle w przedziale $(-50\%, +50\%)$ wartości teoretycznej, ale dla $N = 16$ – w znacznie węższym przedziale $(-2\%, +2\%)$. Ta pozornie dziwna właściwość ma wyjaśnienie analityczne – prawdopodobieństwo równowagi, rozumianej jako prawdopodobieństwo wystąpienia w n -elementowej próbie dokładnie $2^{-N} n/N$ realizacji dowolnej N -wymiarowej zmiennej losowej, dane jest zależnością (Bobrowski, 2002; Leśniewicz, 2009):

$$P_R(n, N) = \sqrt{\frac{2^{N-1} N}{(1 - 1/2^N)\pi n}}, \quad (3)$$

z której wynika, że prawdopodobieństwo takiej równowagi jest znacznie większe dla zmiennych losowych o większych wymiarach i np. dla próby o liczebności $n = 1\,048\,576$ elementów $P_R(n, N = 16) = 0,4$, a $P_R(n, N = 1) = 0,0024$. Z porównania tych prawdopodobieństw nie wynikają jednak wartości powyższych przedziałów i taka interpretacja ma charakter tylko jakościowy.

Wyniki analiz wartości tego rodzaju odchyłeń, zwłaszcza w przypadku wielowymiarowych zmiennych losowych, są niestety mało czytelne. Po prostu jeśli N jest duże, to niewiele mówi stwierdzenie, że w danej próbie wszystkie z 2^N wartości $\sigma(X_1, \dots, X_N)$ czy $\alpha(X_1, \dots, X_N)_{sr}$ są dla każdej zmiennej losowej X_1, \dots, X_N nawet bardzo zbliżone.

Okazuje się, że zależności te przekładają się również na entropię informacyjną Shannona, która po uwzględnieniu wariancji $V(X_1, \dots, X_N)$ w funkcji liczebności n przyjmuje dla ciągu doskonale losowego postać zilustrowaną na wyk. 2, daną jako entropia oczekiwana (Leśniewicz, 2009):

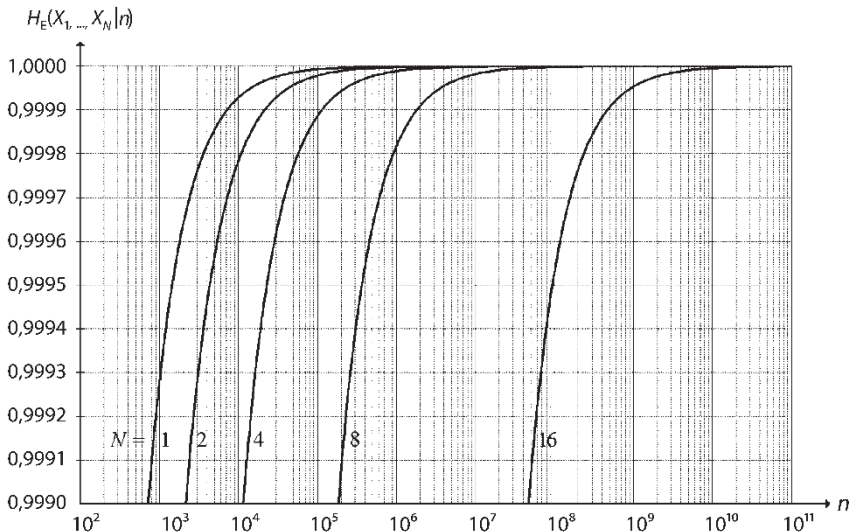
$$H_E(X_1, \dots, X_N | n) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (n_i N/n) \log_2(n_i N/n) = 1 - \frac{2^{N-1}}{2 \ln(2) n}, \quad (4)$$

gdzie n_i stanowi liczbę realizacji każdej ze zmiennych losowych X_1, \dots, X_N .

Zależność i wykres można interpretować następująco. Dla doskonale losowego ciągu N -wymiarowych zmiennych losowych X_1, \dots, X_N o $P(X_1, \dots, X_N) = 1/2^N$ definicyjna entropia ma wartość $H(X_1, \dots, X_N) = 1$, ale oczekiwana entropia próby n -elementowej $H_E(X_1, \dots, X_N | n)$ ma charakter asymptotyczny i nie osiąga tej wartości nawet w przypadku prób o bardzo dużej liczebności. Źródło zjawiska jest to samo – nie jest to wynik potencjalnej nielosowości, tylko naturalny wpływ niezerowej wariancji ciągu o skończonej liczebności n . Patrząc na to z punktu widzenia teorii układów dynamicznych, ograniczonej liczebnie próbie ciągu można przypisać niepełne wymieszanie przestrzeni fazowej w sensie niezawierania się w niej wszystkich potencjalnych

realizacji zmiennych losowych o dowolnie dużych wymiarach N , co również w tej teorii skutkuje niepełną entropią.

Wykr. 2. Zjawisko asymptotycznego wzrostu entropii oczekiwanej w funkcji liczebności próby



Źródło: Leśniewicz (2009).

W praktyce – z powodu wpływu tego zjawiska – entropia oczekiwana i jej pomiary są mało użyteczne w przypadku analiz realizacji wielowymiarowych zmiennych losowych, nawet już dla $N = 8$. Wynika to z dwóch przyczyn: po pierwsze, dla n -elementowej próby ciągu liczba realizacji N -wymiarowych zmiennych losowych wynosi już tylko n/N , a po drugie (właściwie przede wszystkim) liczba potencjalnych realizacji (stopni swobody) zmiennych N -wymiarowych wynosi $k = 2^N$, co powoduje, że liczebność realizacji dla każdej zmiennej wynosi średnio $n_i = 2^{-N} n/N$. Przykładowo przy próbie o liczebności $n = 1\,048\,576$ elementów (1 Mbit) dla $N = 1$ liczebność zer i jedynek wynosi średnio po $n_i = 524\,288$ elementów, ale już dla $N = 8$ na jedną zmienną X_1, \dots, X_8 przypada średnio tylko $n_i = 512$ realizacji. W rezultacie zbieżność entropii jest znacznie wolniejsza i wymagane są próby o bardzo dużej liczebności. Ze wzoru (4) i wykr. 2 widać, że dla tego samego poziomu zbieżności entropii dla $N = 8$ w porównaniu z $N = 1$ potrzebna byłaby próba o 256 razy większej liczebności, a więc w powyższym przykładzie $n = 268\,435\,456$ elementów (256 Mbit). Dla $N = 16$ byłaby to już próba o liczebności aż $n = 68\,719\,476\,736$ elementów (64 Gbit).

Trudno też stwierdzić, przy jakiej wartości zmierzonej entropii $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ próby o danej liczebności n można taką próbę zakwalifikować jako realizację ciągu losowego, ponieważ w praktyce pomiarowej żadna próba ciągu nawet doskonale

losowego nie osiąga wartości $H_P(X_1, \dots, X_N | n) = 1$, jako że teoretycznie nie osiąga jej przecież również entropia oczekiwana $H_E(X_1, \dots, X_N | n)$.

Z powyższych względów entropia informacyjna Shannona jest doskonałym narzędziem analitycznym i interpretacyjnym, pozwalającym na określanie granicznych wartości liczebności elementów, przy których entropia oczekiwana osiąga wartości dowolnie bliskie $\lim_{n \rightarrow \infty} H_E(X_1, \dots, X_N | n) = 1$. Nie ma to jednak przełożenia na praktykę pomiarową, ponieważ przy przeprowadzaniu dowodu bezpieczeństwa kryptograficznego, w którym zakłada się racjonalny czas analizy statystycznej, liczony w czasie istnienia Wszechświata, już w przypadku $N = 2$ otrzymuje się wartości bliskie $H_E(X_1, X_2 | n) = 1 - 10^{-32}$, ale dla zupełnie niefizycznych liczebności rzędu $n = 10^{27}$; dla wymiarów $N > 2$ są one odpowiednio większe (Leśniewicz, 2009).

4. Założenia konstrukcji obiektywnego testu ciągów doskonałych losowych

Testy do weryfikacji losowości ciągów, intencjonalnie doskonale losowych, budzą liczne zastrzeżenia. Skoro ciąg doskonale losowy ma tak prosty model probabilistyczny i teorioinformacyjny, to dlaczego istniejące testy *de facto* z niego nie korzystają, a zamiast tego używają mechanizmów weryfikacji dziesiątek arbitralnie spreparowanych, specyficznych cech, których ciąg doskonale losowy nie ma, ponieważ mieć nie powinien, więc oczekiwanie takiej cechy i jej niewykrycie może stanowić o odrzuceniu hipotezy, że ciąg jest doskonale losowy, kiedy w rzeczywistości taki jest.

Część tych mechanizmów jest ewidentnie ukierunkowana na wykrywanie cech nie-losowości właściwych określonej klasie ciągów pseudolosowych (L'Ecuyer i Simard, 2013); tymczasem dana cecha nielosowości może nie występować w innej klasie ciągów pseudolosowych i dany mechanizm jest wówczas nieużyteczny – na pewno w przypadku ciągu doskonale losowego. Dowodem powyższego są opisy generatorów ciągów (Jacak i in., 2021), które spełniają wymagania jednego zestawu testów, ale nie spełniają wymagań innych zestawów, co świadczy o specyficznych cechach takich ciągów, akceptowanych przez jeden zestaw i nieakceptowanych przez inny, a w konsekwencji źle świadczy zarówno o testach (dają się oszukać), jak i o samych ciągach (mają one cechy spreparowane pod specyficzne wymagania danego testu). Ciąg doskonale losowy w każdej próbie powinien spełniać każdy test, oczywiście poprawnie skonstruowany matematycznie.

Historia rozwoju metod statystycznego testowania ciągów losowych liczy sobie ponad 80 lat. Tymczasem w 2022 r. NIST, uznawany za czołową instytucję normalizującą, nagle po 12 latach wycofał swoje rekomendacje dla zestawu testów do badania losowości ciągów (NIST, 2022), pozostawiając badaczy i użytkowników w rozterce, że w tym czasie

stosowali niewiarygodne narzędzie matematyczne, a w konsekwencji uzyskane przez nich wyniki naukowo-techniczne weryfikowane tym narzędziem mogą być fałszywe.

Powyzsze wątpliwości prowadzą do następujących wniosków:

1. Obiektywny test ciągu doskonale losowego musi opierać się na modelach probabilistycznym i teoriiinformacyjnym (opisanych w częściach 3 i 4).
2. Wynik takiego testu powinien być binarny – próba ciągu bezwarunkowo spełnia wymagania testu i ciąg jest kwalifikowany jako losowy lub nie spełnia wymagań testu i ciąg jest kwalifikowany jako nielosowy.
3. Ciągi pseudolosowe nie są ciągami losowymi, tylko deterministycznymi, powinny być zatem źródłowo konstruowane zgodnie z prawami algebry i teorii liczb oraz mieć *a priori* dowiedzione referencyjne właściwości i parametry statystyczne wynikające z zastosowania odpowiednich funkcji algebraicznych, które *a posteriori* może i powinien sprawdzić na etapie konstrukcji ciągu jego twórca. Użytkownik takiego ciągu nie powinien już ich testować, ponieważ każda próba ciągu powinna mieć wzmiankowane referencyjne właściwości i parametry statystyczne. Kryptograficznymi przykładami generatorów ciągów pseudolosowych są funkcja *sponge*, jak również wcześniejsze konstrukcje szyfrów typu DES i AES czy funkcja skrótu SHA-3.
4. Ciągi prawdziwie i doskonale losowe są domeną generatorów sprzętowych, więc testy powinny być ukierunkowane na wykrywanie cech nielosowości właściwych ciągom wytwarzanym przez te generatory, z uwzględnieniem tego, że w praktyce:
 - 90% błędów nielosowości wynika z niezrównoważenia zmiennych losowych o wymiarze $N = 1$, czyli statystyk $\{0\}$ i $\{1\}$, zatem nierównowagi $P(0) \neq P(1) \neq 1/2$, i choć są to zazwyczaj minimalne różnice, to wpływają one na niezrównoważenia wszystkich wyższych zmiennych losowych o wymiarze $N \geq 2$;
 - 5% błędów nielosowości wynika z niezrównoważenia zmiennych losowych o wymiarze $N = 2$, czyli statystyk par $\{0, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 0\}$ i $\{1, 1\}$, zatem nierównowagi $P(0,0) \neq P(0,1) \neq P(1,0) \neq P(1,1) \neq 1/4$, co wynika z inercyjnych właściwości źródeł losowości, np. szumów elektrycznych, i przekłada się na korelacje międzyelementowe oraz klasyczną, Markowowską zależność 1. rzędu, tzn. $P(X_N | X_1, \dots, X_{N-1}) = P(X_N | X_{N-1}) \neq 1/2$;
 - 5% błędów nielosowości wynika z przypadkowych właściwości i parametrów elektronicznych układów przetwarzających sygnały losowe. Wynikowo powoduje to pojawianie się niezrównoważonych zmiennych losowych o znacząco większych wymiarach $N \geq 8$, co powoduje, że np. statystyki $\{1\}$ i $\{0\}$, a nawet pary $\{0, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 0\}$ i $\{1, 1\}$ mogą być referencyjne, ale pojawiają się niezrównoważenia w sensie np. nieznacznego nadmiaru jednych i niedomiaru innych realizacji o wymiarze $N = 16$, jeśli dany układ przetwarzający pracuje w arytmetyce 16-bitowej;
 - analizy wielowymiarowych zmiennych losowych są pracochłonne i żmudne, wyniki mało czytelne, a stosowalność entropii informacyjnej Shannona jest ograniczona

wpływem niezerowej wariancji ciągów losowych, mającej źródło w ograniczonej liczbie badanych prób ciągów.

5. Test zgodności chi-kwadrat dla ciągu doskonale losowego

Trudno byłoby przecenić użyteczność testu zgodności χ^2 w weryfikacji hipotez statystycznych, które dotyczą zjawisk polegających na porównywaniu częstości zdarzeń doświadczalnych ze spodziewanymi czy zależności między zmiennymi losowymi.

Zastosowanie statystyki testu χ^2 do porównywania częstości zdarzeń doświadczalnych ze spodziewanymi, zdefiniowanej przez Pearsona jako

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i/n - p_i)^2}{p_i}, \quad (5)$$

odpowiada weryfikacji hipotezy, że badana próba ciągu o liczbie n elementów, $k = 2^N$ stopniach swobody i nieznanym rozkładzie jest próbą doskonale losowego ciągu o dyskretnym rozkładzie równomiernym i prawdopodobieństwach zmiennych losowych $p_i = P(X_1, \dots, X_N) = 1/2^N$.

Bezpośrednie zastosowanie takiej statystyki jest możliwe, nie wykorzystuje ono jednak pewnych ukrytych zależności właściwych ciągom doskonale losowym, które specyficznie i znacząco zmieniają właściwości i parametry uniwersalnej, definicyjnej statystyki testu χ^2 .

Łatwo zauważyć, że wartość w liczniku drugiej wersji zależności, czyli statystyczna wariancja $(n_i/n - p_i)^2$, odpowiada probabilistycznej wariancji $V(X_i) = P(X_i)(1 - P(X_i))/n$, która dla doskonale losowego ciągu N -wymiarowych zmiennych losowych dane jest jako $V(X_i) = 1/2^N(1 - 1/2^N)N/n = (n_i/n - 1/2^N)^2$. Wartość w mianowniku to oczywiście $1/2^N$, a stąd

$$\chi^2 = n/N \sum_{i=1}^k \frac{v(x_i)}{p_i} = n/N \sum_{i=1}^k \frac{1/2^N(1-1/2^N)N/n}{1/2^N}, \quad (6)$$

która po prostych przekształceniach i zsumowaniu wszystkich $k = 2^N$ składników sumy przyjmuje dla każdej N -wymiarowej zmiennej losowej właściwą jej jednowartościową postać, niezależną od liczby prób n :

$$\chi^2(N)_L = 2^N(1 - 1/2^N) = 2^N - 1 = df(N) - 1, \quad (7)$$

czyli wartość stopnia swobody $df(N)$ pomniejszoną o 1.

Są to statystyki testu χ^2 właściwe ciągom doskonale losowym, a ich wartości nie są funkcją potencjalnej nielosowości, ale naturalnego wpływu niezerowych wariancji dla wszystkich potencjalnych realizacji zmiennej losowej X_1, \dots, X_N . Ściśle mówiąc, właściwość ta charakteryzuje nie tylko ciągi doskonale losowe, lecz także wszystkie ciągi losowe, mające wariancje w postaciach dających się uprościć względem prawdopodobieństw zgodnie z zależnością (6).

Statystyki te można opisać następująco:

1. Gdyby każda próba badanego ciągu była próbą ciągu doskonale losowego i dla każdej N -wymiarowej zmiennej losowej występowałoby $n_i = n / N 1/2^N$ realizacji, to $\chi^2(N) = 0$. Jednak tak nigdy nie jest i próba ciągu o $\chi^2(N) = 0$ na pewno nie jest realizacją ciągu losowego.
2. Żadna realizacja badanego ciągu doskonale losowego nie może mieć zatem wartości statystyki $\chi^2(N) \ll 2^N - 1$.
3. Wariancje $V(X_1, \dots, X_N)$ mają zawsze niezerowe, powtarzalne i stabilne wartości, dlatego wartość $\chi^2(N)_L = 2^N - 1$ stanowi najmniejszą wartość statystyki, właściwą jednak tylko ciągowi losowemu, w rozważanym przypadku opisanemu prawdopodobieństwami $P(X_1, \dots, X_N) = 1/2^N$.
4. Żadna realizacja ciągu o wartości statystyki $\chi^2(N) \gg 2^N - 1$ nie może być zatem realizacją ciągu doskonale losowego.
5. Model testu spełnia założenia testu zgodności χ^2 , włącznie z tym, że dla odpowiednio liczebnych prób rozkłady wszystkich N -wymiarowych zmiennych losowych są normalne.
6. Porównywanie statystyk dla różnych wymiarów N zmiennej losowej może być mało czytelne, ponieważ dla większych wymiarów N przyjmują one znacznie większe wartości, więc wskazana jest ich normalizacja względem wartości $df(N) - 1 = 2^N - 1$ i zastosowanie zredukowanej statystyki testu χ^2 , tzn.

$$\chi^2(N)_{LN} = \frac{2^N - 1}{df(N) - 1} = 1, \quad (8)$$

gdzie wartość $\chi^2(N)_{LN} = 1$ stanowi ponadto jej wartość oczekiwaną $E(N)$.

W tabl. 1 zamieszczono oczekiwane wartości statystyk obliczone dla różnych wymiarów N . Dla porównania w ostatniej kolumnie zamieszczono wartości zredukowanych standardowych statystyk $\chi^2(N)_N$ dla typowo przyjmowanych poziomów istotności (od 0,05 do 0,001). Jak widać, statystyki $\chi^2(N)_{LN}$ dla ciągów doskonale losowych mają wyraźnie mniejsze wartości w porównaniu ze statystykami $\chi^2(N)_N$ w standardowej postaci. Łatwo jednak dostrzec, że – zwłaszcza dla zmiennych losowych o dużych wymiarach N

– statystyki $\chi^2(N)$ w wersji zredukowanej też wyraźnie dążą do wartości $\chi^2(N)_N = 1^3$. Korzystając od razu z tej zależności, można zauważyć, że standardowe statystyki $\chi^2(N)_N$ dla różnych poziomów istotności operują przedziałami o wartościach tylko dodatnich i wyraźnie szerszych od σ_N – z natury rzeczy tym szerszych, im poziom istotności jest mniejszy. Statystyka $\chi^2(N)_{LN}$ reprezentuje więc najwyższy poziom losowości w sensie najniższej granicznej wartości statystyki $\chi^2(N)_N$. Nie zmienia to istoty testu χ^2 , a tylko stawia wyższe wymagania jego statystyce, które może spełnić ciąg doskonale losowy.

Tabl. 1. Statystyki χ^2 dla N -wymiarowych zmiennych losowych

N	Liczba stopni swobody $k = 2^N$	Statystyka $\chi^2(N)_L$ $= 2^N - 1$	Standardowa statystyka $\chi^2(N)_N = \chi^2 / (df(N) - 1)$ dla poziomów istotności od 0,05 do 0,001 ^a
1	2	1	$4 \div 10 / 1 = 4 \div 10 = 1 + 3,0 \div 9,00 \sigma_{N=1}$
2	4	3	$8 \div 16 / 3 = 2,67 \div 5,33 = 1 + 2,4 \div 6,10 \sigma_{N=2}$
3	8	7	$14 \div 24 / 7 = 2,00 \div 3,43 = 1 + 2,0 \div 4,86 \sigma_{N=3}$
4	16	15	$25 \div 38 / 15 = 1,67 \div 2,53 = 1 + 1,9 \div 4,32 \sigma_{N=4}$
5	32	31	$45 \div 61 / 31 = 1,45 \div 1,97 = 1 + 1,8 \div 3,88 \sigma_{N=5}$
6	64	63	$83 \div 103 / 63 = 1,32 \div 1,63 = 1 + 1,8 \div 3,56 \sigma_{N=6}$
7	128	127	$154 \div 182 / 127 = 1,21 \div 1,43 = 1 + 1,7 \div 3,44 \sigma_{N=7}$
8	256	255	$293 \div 330 / 255 = 1,15 \div 1,29 = 1 + 1,7 \div 3,28 \sigma_{N=8}$
9	512	511	$565 \div 613 / 511 = 1,11 \div 1,20 = 1 + 1,7 \div 3,21 \sigma_{N=9}$
10	1 024	1 023	$1 100 \div 1 170 / 1 023 = 1,075 \div 1,14 = 1 + 1,7 \div 3,18 \sigma_{N=10}$

a Ostatni wyraz to $1 + \text{przedział} \times \sigma_N = 1 + \text{przedział} \times 2^{-(N-1)/2}$.

Uwaga. Statystyka $\chi^2(N)_{LN} = 1$.

Źródło: opracowanie własne.

Pomiarowa statystyka $\chi^2(n, N)_P$ próby ciągu doskonale losowego o liczebności n dana jest jako

$$\chi^2(n, N)_P = \frac{2^N}{2^N - 1} \frac{n}{N} \sum_{i=1}^k (n_i N / n - 1 / 2^N)^2, \quad (9)$$

gdzie n_i stanowi liczbę realizacji każdej z $k = 2^N$ zmiennych losowych X_1, \dots, X_N .

Taka postać statystyki ma trzy oczywiste zalety:

- statystyka $\chi^2(n, N)_P$ zachowuje wszystkie właściwości i parametry definicyjnej statystyki $\chi^2(N)$;
- wyniki dla każdej z N -wymiarowych zmiennych losowych są weryfikowane pod względem zgodności z jedną znormalizowaną wartością $\chi^2(N)_{LN} = 1$, co bardzo ułatwia analizy porównawcze;

³ W części 6 wyznaczane są wariancja i odchylenie standardowe tego rozkładu dla zmiennych losowych o dowolnym wymiarze N w postaci $\sigma_N = 2^{-(N-1)/2}$.

- wszystkie składniki sumy są dodatnie, więc statystyka jest rosnąca i nie wykazuje właściwości wzajemnego kompensowania się realizacji częściej i rzadziej występujących. Oznacza to, że dla ciągu, którego statystyki byłyby zmienne w funkcji liczebności n lub wymiaru N , statystyka będzie zbierała i sumowała wszystkie odchylenia i na końcu okaże je jako zbiorczy parametr nielosowości.

Warto jeszcze rozważyć, jakie liczebności prób ciągów powinny być używane, aby statystyka była wiarygodna, tzn. zbieżna. W tabl. 2 zamieszczono obliczone liczebności dla większych wymiarów N , ponieważ to właśnie one wymagają znacznie liczebniejszych prób. Przyjęto następującą konwencję wartości: 1000 MB = 1 GB = =1000 × 8 × 1 048 576 elementów.

Tabl. 2. Liczebność prób niezbędna do spełnienia wymagań statystyki $\chi^2(n, N)_P$

N	$2^N =$ liczba przedziałów	$n_i > 30$	$n_i > 100$	$\Delta n_i / n_i < 1/8$	$\Delta n_i / n_i < 1/16$
		w MB			
16	65 536	3,93	13,1	5,34	21,4
18	262 144	17,7	59	24	96
20	1 048 576	78,6	262	107	428
22	4 194 304	345	1 150	470	1 880
24	16 777 216	1 510	5 030	2 050	8 200
26	67 108 864	6 540	21 800	8 890	35 600
28	268 435 456	28 200	94 000	38 300	153 000
30	1 073 741 824	121 000	403 000	164 000	656 000

Źródło: opracowanie własne.

Obliczono niezbędne liczebności dla czterech warunków – średnich liczebności realizacji $n_i > 30$ i $n_i > 100$ oraz liczebności zapewniających dokładność każdej i -tej realizacji lepszą od $\Delta n_i / n_i < 1/8$ i $\Delta n_i / n_i < 1/16$. Jak się okazuje, dla danego N mają one zbliżone wartości. Weryfikacja ich rzeczywistych, tzn. niezbędnych, liczebności została przeprowadzona doświadczalnie. Wynika z niej, że górną granicą badanych wymiarów może być $N = 20$, ponieważ generowanie i pomiary prób o liczebności wielu gigabajtów wymagałyby specjalnych generatorów o wyjątkowo dużych wydajnościach, a czas obliczeń na typowych komputerach byłby dość długi⁴.

6. Test zgodności chi-kwadrat dla rzeczywistego ciągu doskonale losowego

Przedstawiona w części 5 statystyka testu $\chi^2(N)_{LN}$ dla ciągów doskonale losowych może wydawać się zbyt prosta i – z pozornie niejasnych powodów – niezależna od

⁴ Te problemy opisano szerzej w części 10.

liczebności próby. Te wątpliwości najlepiej wyjaśnić dzięki doświadczalnemu wykonaniu pomiarowej weryfikacji wyprowadzonych analitycznie teoretycznych wartości $\chi^2(N)_{LN}$. Weryfikacja powinna polegać na pomiarach statystyk $\chi^2(n, N)_P$ dla prób ciągów, które przy zastosowaniu innych metod zostały uznane za doskonale losowe, i porównaniu ich z wartościami $\chi^2(N)_{LN}$.

Wygenerowano 10 prób ciągów o liczebności $n = 1000$ MB. Obserwowano bieżące wartości $\chi^2(n, N)_P$ kolejnych podciągów o liczebności 1 MB i wartości dla sumy tych podciągów. Wyniki uśrednionych pomiarów w sensie wyznaczenia dla każdej liczebności statystyki testu $\chi^2(n, N)_P$ zawiera tabl. 3. W kolumnie „rozmiar próby” uwzględniono liczebności sumy podciągów 1 MB, przy których zauważono wyraźne zmiany wartości statystyki. Statystyki wyznaczono dla realizacji zmiennych losowych o wymiarach $N = 1, 2, 4, 8, 16$ i 20.

Tabl. 3. Statystyki $\chi^2(n, N)_P$ rzeczywistego ciągu doskonale losowego

Rozmiar próby w MB	$\chi^2(N=1)_P$	$\chi^2(N=2)_P$	$\chi^2(N=4)_P$	$\chi^2(N=8)_P$	$\chi^2(N=16)_P$	$\chi^2(N=20)_P$
1	0÷4	0÷4	0,6÷1,4	0,8÷1,3	0,99÷1,01	0,998÷1,002
50	0÷4	0÷4	0,7÷1,3	0,9÷1,1	0,99÷1,01	0,999÷1,001
500	<1	<1	0,7÷1,3	0,9÷1,1	0,995÷1,005	0,999÷1,001
1 000	<1	<1	0,8÷1,2	0,95÷1,05	0,995÷1,005	0,999÷1,001
$\pm\sigma = \pm 2^{-(N-1)/2}$	$\pm 1,00$	$\pm 0,71$	$\pm 0,35$	$\pm 0,088$	$\pm 0,0055$	$\pm 0,00135$
$\pm 3\sigma = \pm 3 \times 2^{-(N-1)/2}$	$\pm 3,00$	$\pm 2,12$	$\pm 1,06$	$\pm 0,265$	$\pm 0,0166$	$\pm 0,00405$

Źródło: opracowanie własne.

Z pomiarów wynika, że:

- dla dowolnej N -wymiarowej zmiennej losowej i dowolnej liczebności próby n wyniki obliczeń wartości statystyki $\chi^2(n, N)_P$ są ściśle zbieżne z wyznaczonymi teoretycznie wartościami statystyki $\chi^2(N)_{LN} = 1$;
- przedziały zbieżności statystyk wokół wartości $\chi^2(n, N)_{LN}$ są tym mniejsze, im liczebniejsza była badana próba. W praktyce dostatecznie zbieżne wyniki otrzymuje się już dla prób o liczebności 1 MB, a dwukrotne zawężenie przedziału zbieżności do stabilnej wartości dla dowolnego wymiaru N wymaga zwiększenia liczebności próby do 1 GB, zbieżność ta jest zatem bardzo wolna. Można szacować, że dla bardzo dużych liczebności rzędu 1 GB przedziały zbieżności dla różnych wymiarów N dane są w przybliżeniu jako $\Delta\chi^2(n, N)_P / \chi^2(n, N)_P \approx \pm 2^{-N/2}$;
- szerokość przedziału zbieżności można jednak łatwo określić teoretycznie. $\chi^2(N)_{LN}$ pozostaje statystyką $\chi^2(N)$, której wartość oczekiwana dla ciągu doskonale losowego $E(N) = k = 2^N$, a wariancja $V(N) = \sigma^2 = 2k = 2^{N+1}$, dlatego stosunek odchylenia standardowego do wartości oczekiwanej $\sigma_{LN} / E(N)_{LN} = 2^{-(N-1)/2}$. Dla $E(N)_{LN} = 1$ wartość $\sigma^2_{LN} = 2^{-N+1}$ można zatem nazwać *unormowaną wariancją statystyki $\chi^2(N)_{LN}$* dla ciągów doskonale losowych. Przy uwzględnieniu, że dla dużych wymiarów N i dużych

liczebności n statystyka χ^2 dąży do rozkładu normalnego, wskazane byłoby jednak przyjęcie szerokości przedziałów zbieżności odpowiadających kryterium $\pm 3\sigma$, zawierających $p \geq 0,997$ wyników, i wtedy przedziały zbieżności będą dane jako $\pm 3\sigma_{LN} / E(N)_{LN} = \pm 3\sqrt{2} \times 2^{-N/2} \approx \pm 4,24 \times 2^{-N/2}$. To przybliżenie jest jednak dokładne tylko dla wymiarów $N \geq 5$, ponieważ dla mniejszych N lewe ogony statystyk $\chi^2(N)$ nie przypominają ogonów rozkładu normalnego. Biorąc to pod uwagę, należy założyć zerową graniczną wariancję $\chi^2(N)$ dla lewej strony statystyki;

- w przypadku prób o zbyt małej liczebności wyniki dla małych wymiarów zmiennych losowych N są niezbyt wiarygodne, bo rozproszone, jednak w każdym przypadku wokół oczekiwanych wartości $\chi^2(N)_{LN} = 1$;
- powyższe spostrzeżenia ściśle korespondują również z wynikami przedstawionymi w tabl. 1.

Wyniki pomiarów statystycznych prób ciągów doskonale losowych o dowolnej liczebności n potwierdzają zatem w pełni poprawność analiz probabilistycznych, jednak zbieżność do wartości $\chi^2(N)_{LN} = 1$, zwłaszcza dla zmiennych losowych o małych wymiarach $N = 1$ i 2 , następuje dopiero w przypadku prób o bardzo dużej liczebności, sięgającej 1 GB. Powyższe spostrzeżenia są zatem zgodne z kolejnymi, opisanymi w części 3, właściwościami ciągów doskonale losowych – modułem średniego odchylenia od wartości oczekiwanej $\alpha(X_1, \dots, X_N)_{sr}$ i prawdopodobieństwem równowagi dowolnej N -wymiarowej zmiennej losowej $P_R(n, N)$.

7. Test zgodności chi-kwadrat dla rzeczywistego ciągu niedoskonale losowego

Wyniki badań prób ciągów doskonale losowych w pełni potwierdziły matematyczną poprawność i aplikacyjną użyteczność w sensie ścisłej zbieżności statystyki $\chi^2(n, N)_P$ do $\chi^2(N)_{LN}$. Interesujące byłoby teraz sprawdzenie, choćby dla pokazania zdolności identyfikacji potencjalnych nielosowości, jaka jest wrażliwość tej statystyki na potencjalne nielosowości badanego ciągu.

Najprostszym sposobem, i zarazem najlepiej odzwierciedlającym sprzętowe uwarunkowania generowania ciągów losowych, jest użycie ciągu z elementarnego sprzętowego generatora, który źródłowo wytwarza ciągi prawdziwie losowe, ale bardzo dalekie od doskonałości (Leśniewicz, 2009). Wyraża się to nierównowagą (ang. *bias*), opisaną jako $P(0) = 1/2 - s$ oraz $P(1) = 1 - P(0) = 1/2 + s$, gdzie typowa wartość $s = 0,005$, oraz korelacjami międzyelementowymi, modelowanymi właściwością Markowa 1. rzędu, opisaną jako $P(X_N | X_{N-1}) \neq 1/2$, co sprowadza prawdopodobieństwa par elementów $\{0\}$ i $\{1\}$ do wartości $P(0, 0) = 1/4 - s + 1/4 K$, $P(0, 1) = 1/4 - 1/4 K$, $P(1, 0) = 1/4 - 1/4 K$ i $P(1, 1) = 1/4 + s + 1/4 K$, gdzie $K = P(0, 0) + P(1, 1) - P(0, 1) - P(1, 0) - (2s)^2$ o typowej wartości $K = 0,005$. Wartości parametrów s i K wynikają

z elektrycznych właściwości elementów, stanowiących źródła losowości, i charakteryzują się dobrą stabilnością w czasie i zmiennych warunkach klimatyczno-mechanicznych, ale są różne dla każdego egzemplarza generatora, a rozrzut ich wartości sięga zwykle $\pm 50\%$.

Wyznaczenie oczekiwanych wartości statystyk $\chi^2(n, N)$ dla różnych n i N przy powyższych założeniach jest możliwe, ale bardzo pracochłonne i – zwłaszcza dla większych wymiarów N – zależne od relacji wartości s i K , więc prostsze jest doświadczalne sprawdzenie wrażliwości statystyki $\chi^2(n, N)_P$ na nielosowość badanego ciągu. Badanie przeprowadzono na jednej próbie ciągu o liczebności 1 GB. Zarejestrowano statystyki dla sum kolejnych podciągow o liczebności 1 MB. Wybrane wyniki ilustruje tabl. 4.

Tabl. 4. Statystyki $\chi^2(n, N)_P$ rzeczywistego ciągu niedoskonale losowego z $s = 0,005$ i $K = 0,005$

Rozmiar próby w MB	$\chi^2(N=1)_P$	$\chi^2(N=2)_P$	$\chi^2(N=4)_P$	$\chi^2(N=8)_P$	$\chi^2(N=16)_P$	$\chi^2(N=20)_P$
1	1 200	750	53	10	1,039	1,0001
10	11 300	7 100	460	85	1,325	1,0070
100	111 000	70 000	4 710	830	4,220	1,0680
1 000	1 160 000	720 000	46 000	8 500	34,20	1,6600

Źródło: opracowanie własne.

Z danych zawartych w tabl. 4 wynika oczywisty wniosek, że statystyka $\chi^2(n, N)_P$ jest niezależna od liczebności próby n tylko dla ciągów doskonale losowych, natomiast dla niedoskonale losowych wykazuje tym większą wrażliwość, im badana próba ciągu jest liczebniejsza. Stanowi to bardzo cenną właściwość pomiarową, ponieważ gdyby statystyka $\chi^2(n, N)_P$ przekraczała nieznacznie, ale zauważalnie wartość $\chi^2(N)_{LN} = 1$, można byłoby dokonać badania znacznie liczebniejszej próby. Jeśli wartość $\chi^2(n, N)_P$ odpowiednio wzrosłaby, to stanowiłoby to dowód na występowanie ewidentnej nielosowości.

Pewne wątpliwości może budzić progresja wartości statystyki $\chi^2(n, N)_P$ w zależności od wymiaru N ; dla $N = 1, 2, 4$ i 8 jest ona w przybliżeniu liniowa w funkcji liczebności próby n , ale dla większych wymiarów $N = 16$ i 20 wydaje się, że wrażliwość rozpatrywanej statystyki jest znacznie mniejsza. Wynika to po pierwsze z tego, że w badanym typie nielosowości, tzn. nierównowagi i korelacji międzyelementowych, są one – z natury rzeczy – szybko identyfikowane przez statystykę $\chi^2(n, N)_P$ dla $N = 1$ (nierównowaga) i $N = 2$ (korelacje), a dla zmiennych losowych o większych wymiarach N rozkładają się one równomiernie w dłuższych realizacjach. Po drugie, należy pamiętać, że w przypadku ciągu doskonale losowego rozproszenie wyników np. dla $\chi^2(n, N = 16)_P$ i liczebności do 100 MB wynosi od 0,99 do 1,01, zatem w przypadku ciągu nielosowego już dla 1 MB widać wyraźną, dodatkową nielosowość, która dla 10 MB rośnie ponad 30-krotnie, a dla 100 MB czy 1 GB przyjmuje nawet wartości znacznie większe od 1.

W takiej sytuacji należy powtórzyć badanie dla co najmniej 10-krotnie większej próby i stwierdzić, że wartości $\chi^2(n, N)_P$ dla $N = 1, 2, 4$ i 8 wzrosły w przybliżeniu kolejne 10 razy, a dla $N = 16$ i 20 – wyraźnie przekroczyły wartość 1. W całości taki raport stanowi o ciągu bardzo dalekim od losowości doskonałej już przy próbie o liczebności 1 MB.

Aby sprawdzić wrażliwość testu na znacznie mniejsze nielosowości, wygenerowano próbę ciągu o nierównowadze $s = 0,0002$ i korelacjach $K = 0,00002$. Wybrane wyniki zawiera tabl. 5.

Tabl. 5. Statystyki $\chi^2(n, N)_P$ rzeczywistego ciągu niedoskonale losowego
z $s = 0,0002$ i $K = 0,00002$

Rozmiar próby w MB	$\chi^2(N=1)_P$	$\chi^2(N=2)_P$	$\chi^2(N=4)_P$	$\chi^2(N=8)_P$	$\chi^2(N=16)_P$	$\chi^2(N=20)_P$
1	1,11	0,91	0,96	1,05	1,0025	1,0005
10	7,46	2,52	1,55	1,13	1,0040	1,0004
100	158,00	53,00	11,10	1,30	1,0090	1,0009
1 000	1 630,00	540,00	108,00	4,76	1,0260	1,0015

Źródło: opracowanie własne.

Wnioski z wyników pomiarów są takie same jak w poprzednim przypadku – ciągi zostaną bezwarunkowo zakwalifikowane jako niedoskonale losowe, ale dopiero dla prób o liczebności powyżej 10 MB. Można wspomnieć, że większość używanych obecnie testów zakwalifikowałaby taki ciąg jako doskonale losowy. Wypływa z tego wniosków, że badanie zbyt małych prób ciągów uniemożliwia wykrycie potencjalnych nielosowości. Można jednak zauważyć, że aplikacyjne użycie próby ciągu o liczebności uniemożliwiającej wykrycie takich nielosowości można byłoby uznać za dopuszczalne, jeśli byłoby jednorazowe. Taki kompromis jest jednak nie do przyjęcia w przypadku kolejnych prób, co wyraźnie pokazują kolejne wiersze tabl. 5.

Aby ocenić graniczne możliwości testu, warto sprawdzić jego wrażliwość przy jeszcze mniejszych nielosowościach – nierównowadze $s = 0,00001$ i korelacjach $K = 0,000007$. Wyniki przedstawiono w tabl. 6.

Tabl. 6. Statystyki $\chi^2(n, N)_P$ rzeczywistego ciągu niedoskonale losowego
z $s = 0,00001$ i $K = 0,000007$

Rozmiar próby w MB	$\chi^2(N=1)_P$	$\chi^2(N=2)_P$	$\chi^2(N=4)_P$	$\chi^2(N=8)_P$	$\chi^2(N=16)_P$	$\chi^2(N=20)_P$
1	0,57	0,31	0,94	1,070	1,0092	1,0016
10	0,15	0,73	1,03	0,960	1,0071	1,0021
100	0,83	0,35	1,08	0,940	0,9989	0,9989
1 000	1,35	0,88	1,09	0,960	1,0008	1,0008
2 000	7,91	2,78	1,13	1,006	0,9981	0,9991
3 000	11,40	4,08	1,29	1,037	0,9944	0,9995
4 000	15,90	5,50	1,33	1,070	0,9953	0,9994

Źródło: opracowanie własne.

Dla prób o liczebności do 1 GB wszystkie znane testy, nawet $\chi^2(n, N)_P$, uznałyby taki ciąg za doskonale losowy. Można to łatwo wyjaśnić, porównując wartość nierównowagi $s = 0,00001$ z wartością modułu średniego odchylenia od wartości oczekiwanej dla zmiennej losowej o wymiarze $N = 1$, danej jako $\alpha(X_1) = (2\pi n)^{-1/2}$, a dla liczebności $n = 8 \times 1000 \times 1\,048\,576$ elementów równej $\alpha(X_1) = 0,0000043$, zatem około dwukrotnie mniejszej od $s = 0,00001$. Jak widać, $\chi^2(n, N)_P$ bardzo rygorystycznie reaguje na objawy nierównowagi i wszystkie inne odchylenia od naturalnej losowości ciągu. Ponownie można też zauważyć, że w badanym typie nielosowości statystyka $\chi^2(n, N)_P$ dla $N = 1$ i 2 wykazuje największą wrażliwość, natomiast dla $N = 8, 16$ i 20 – z opisanych już powodów – znacznie mniejszą. Wynika z tego ponownie, że potencjalne mniejsze nielosowości ciągu mogą się ujawnić dopiero w przypadku prób o odpowiednio większej liczebności. Problem z ich wykrywaniem jest jednak taki, że generator ciągu musi mieć niezbędną wydajność, a samo testowanie wymaga czasu⁵.

8. Test zgodności chi-kwadrat dla ciągów pseudolosowych

Kolejnym sprawdzeniem użyteczności statystyki $\chi^2(n, N)_P$ były badania ciągów pseudolosowych. Pominięto ciągi uznawane za słabe, natomiast dokładnie zbadano powszechnie stosowany ciąg Mersenne Twister (Sulewski, 2019). Jest to ciąg generowany źródłowo z dyskretnym rozkładem równomiernym i uznawany za jeden z najlepszych ciągów pod względem szybkości generowania i dobrych statystyk, zwłaszcza imponującą długość okresu, o dowiedzionej wartości $L = 2^{19937} - 1 \approx 4,3 \times 10^{6001}$.

Wygenerowano trzy próby ciągów o liczebności $n = 1$ GB, wykorzystując 32-bitową wersję algorytmu, oznaczoną jako MT19937. Każda próba została wygenerowana z użyciem innych warunków początkowych w postaci tablicy inicjującej (Sulewski, 2019).

W ten sam sposób zbadano statystyki $\chi^2(n, N)_P$ funkcji kryptograficznych *sponge*, AES, DES i 3DES oraz SHA-3, konfigurując ich wejścia do pracy w najprostszych trybach licznikowych, przy stałych wektorach inicjujących.

Metodyka i wyniki badań wszystkich ciągów pseudolosowych były identyczne jak dla ciągów prawdziwie i doskonale losowych i nie odbiegały od wartości przedstawionych w tabl. 3. Również w tym przypadku badano tylko statystyki, nie wnikając w algorytmy generowania w sensie badań kryptoanalitycznych. Można jednak wspomnieć, że użycie programowych, tzn. komputerowych generatorów ciągów pseudolosowych, nawet tych poprawnie skonstruowanych, nie musi prowadzić do uzyskania ciągów o domyślnie referencyjnych właściwościach i parametrach statystycznych.

⁵ Temu zagadnieniu jest poświęcona część 10.

W czasie badań stwierdzono bowiem, że:

- nie wszystkie kody źródłowe generatorów tych ciągów mają poprawne implementacje;
- każdy z generatorów musi być poprawnie zainicjowany w sensie trybu pracy i odpowiednio wybranych warunków początkowych. O ile w przypadku funkcji kryptograficznych sprawa jest dość prosta, o tyle właściwe przeprowadzenie procedury inicjującej tablicę do poprawnego wygenerowania ciągu Mersenne Twister jest krytyczne, ponieważ w przypadku błędnej inicjacji otrzymuje się ciągi wyglądające jak losowe, ale statystycznie bardzo dalekie od losowości doskonałej;
- testowanie wszelkich pseudolosowych ciągów z generatorów programowych, w tym również funkcji kryptograficznych, ma głęboki sens kontrolny – obowiązkowo po każdej kompilacji programu na etapie prototypowania – i profilaktyczny, nawet na niezbyt licznej próbie, np. 1 MB, przed każdym operacyjnym użyciem komputera czy innego układu generowania takiego ciągu. Należy bowiem pamiętać, że nawet poprawna wersja programowa nie będzie prawidłowo działała w układzie sprzętowym, który ulegnie uszkodzeniu, zakłóceniu itp.

W przypadku wystąpienia opisanych wyżej błędów implementacyjnych i aplikacyjnych ciągi pseudolosowe zwykle będą miały skrajnie złe statystyki, które można jednak szybko identyfikować poprzez profilaktyczne testowanie ich przed użyciem.

9. Powiązanie testu zgodności chi-kwadrat z entropią informacyjną Shannona

Wracając do prostoty i niezależności od liczebności próby, charakteryzujących wyznaczoną statystykę $\chi^2(N)_{LN}$, a w konsekwencji $\chi^2(n, N)_p$, można teraz skonfrontować je z entropią informacyjną Shannona, która dla ciągów doskonale losowych również korzysta z analizy i obliczeń wariancji ciągu. Jeśli porównamy statystyki $\chi^2(n, N)_p$, entropii oczekiwanej $H_E(X_1, \dots, X_N | n)$ i zmierzonej entropii próby $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ dla ciągów doskonale losowych, tzn.

$$\chi^2(n, N)_p = \frac{2^N}{2^N - 1} \frac{n}{N} \sum_{i=1}^k (n_i N / n - 1 / 2^N)^2, \quad (10)$$

$$H_E(X_1, \dots, X_N | n) = 1 - \frac{2^N - 1}{2 \ln(2) n} \quad (11)$$

i

$$H_E(X_1, \dots, X_N | n) = 1 - \frac{2^{N-1}}{N \ln(2)} \sum_{i=1}^k (n_i N / n - 1 / 2^N)^2, \quad (12)$$

to łatwo wykazemy, że wiąże je zależność

$$\begin{aligned} H_P(X_1, \dots, X_N | n) &= 1 - \frac{2^N - 1}{2 \ln(2) n} \chi^2(n, N)_P = \\ &= 1 - [1 - H_E(X_1, \dots, X_N | n)] \chi^2(n, N)_P, \end{aligned} \quad (13)$$

która świadczy o tym, że dla entropii próby $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ zmienna wartość $1 - H_E(X_1, \dots, X_N | n)$ zawiera się w przedziale zbieżności statystyki $\chi^2(n, N)_P$, wynikającym ze statystyki $\chi^2(N)_{LN}$ i jej unormowanej wariancji $\sigma_{LN}^2 = 2^{-N+1}$.

Zależność między statystyką $\chi^2(n, N)_P$ a entropiami $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ i $H_E(X_1, \dots, X_N | n)$ można przedstawić jeszcze prościej w sensie praktycznej interpretacji. W części 3 wzmiankowano, że wykorzystanie zmierzonej wartości entropii próby $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ nie jest wsparte konkretnym praktycznym kryterium, wskazującym dla danej próby, jaka wartość mniejsza od oczekiwanej entropii $H_E(X_1, \dots, X_N | n)$ może być akceptowana w sensie kwalifikacji danej próby jako realizacji ciągu doskonale losowego. Po prostych przekształceniach zależności $H_P(X_1, \dots, X_N | n) = 1 - \{1 - H_E(X_1, \dots, X_N | n)\} \chi^2(n, N)_P$ można napisać, że

$$\chi^2(n, N)_P = \frac{1 - H_P(X_1, \dots, X_N | n)}{1 - H_E(X_1, \dots, X_N | n)}, \quad (14)$$

i ocenić, jaka zależność wiąże stosunek wartości $1 - H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ i $1 - H_E(X_1, \dots, X_N | n)$, czyli różnic między wartością informacyjnej entropii Shannona $H(X_1, \dots, X_N) = 1$ dla ciągu doskonale losowego a mierzoną entropią próby ciągu $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ i jej entropią oczekiwaną $H_E(X_1, \dots, X_N | n)$. Statystyka $\chi^2(n, N)_P$ stanowi zatem niezależną od liczebności próby n miarę zbieżności mierzonej entropii próby z entropią oczekiwaną.

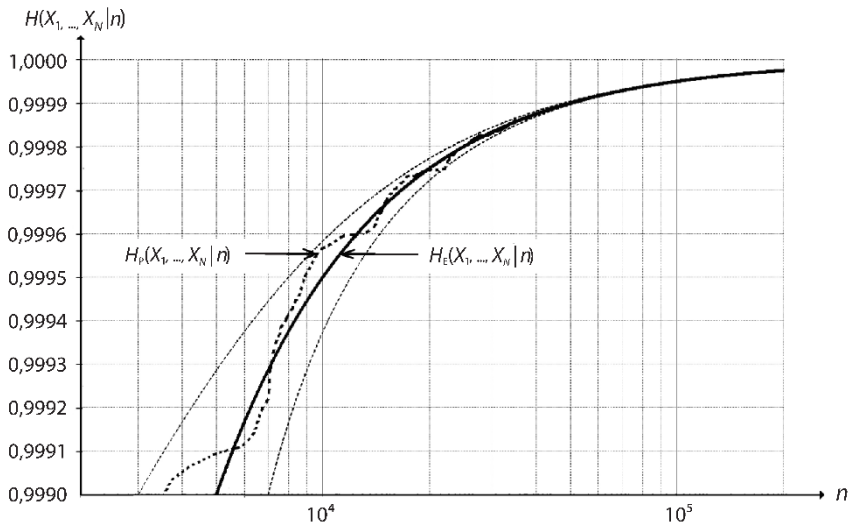
Można dodać, że pozornie prostsza miara stosunku wartości obu entropii, tzn. $H_P(X_1, \dots, X_N | n) / H_E(X_1, \dots, X_N | n)$, daje w rezultacie czytelną, ale niezbyt użyteczną postać, zależną ponadto od liczebności próby n :

$$\frac{H_P(X_1, \dots, X_N | n)}{H_E(X_1, \dots, X_N | n)} = \frac{2 \ln(2) n - \chi^2(n, N)_P (2^N - 1)}{2 \ln(2) n - (2^N - 1)}. \quad (15)$$

Jak widać, dla dużych liczebności prób n i nawet dużych wymiarów N miara ta przyjmuje wartości bardzo bliskie 1, co uniemożliwia identyfikację potencjalnej nie-losowości ciągu. Aby ją wykryć, $\chi^2(n, N)_P$ musiałaby mieć wartości, jakie były dane w pierwszym przykładzie z części 7 (tabl. 4), ale nawet wtedy miara dla $N = 1$ przyjmowałaby wartości bliskie 0,9999, a dla większych N identyfikacja byłaby jeszcze mniej czytelna.

Ilustracją powyższych rozważań są przedstawione na wykr. 3 przykładowe realizacje entropii próby ciągu $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$, oznaczone linią przerywaną, na tle jej entropii oczekiwanej $H_E(X_1, \dots, X_N | n)$, oznaczonej linią ciągłą. Widać na nim, że wartości $1 - H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ i $1 - H_E(X_1, \dots, X_N | n)$ ciągle maleją, ale ich stosunek pozostaje stały i równy $\chi^2(N)_{LN}$ w zakresie unormowanej wariancji $\sigma^2_{LN} = 2^{-N+1}$.

Wykr. 3. Entropia próby $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ na tle entropii oczekiwanej $H_E(X_1, \dots, X_N | n)$



Źródło: opracowanie własne.

Interpretacja powyższych wyników jest następująca:

1. Statystyki $\chi^2(N)_{LN}$ i $\chi^2(n, N)_P$ zostały wyprowadzone z ogólnych przesłanek statystyki matematycznej i źródło nie opierały się na pojęciu entropii informacyjnej Shannona.
2. Entropia próby ciągu losowego $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ była analizowana, mierzona i estymowana (Leśniewicz, 2009), ale nie znano dotąd analitycznej postaci rozproszenia wyników pomiarów $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ względem oczekiwanej wartości $H_E(X_1, \dots, X_N | n)$.
3. Okazuje się, że obie entropie wiąże statystyka $\chi^2(n, N)_B$, która dla ciągu doskonale losowego nie zależy od liczebności próby n .
4. Interpretacja statystyki $\chi^2(n, N)_P$ jest w tym przypadku prosta – im wartości $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ i $H_E(X_1, \dots, X_N | n)$ są sobie bliższe, tym zbieżność statystyk wokół wartości $\chi^2(n, N)_{LN} = 1$ jest większa. Nie oznacza to jednak, że $H_P(X_1, \dots, X_N | n)$ i $H_E(X_1, \dots, X_N | n)$ powinny być sobie równe – w przypadku ciągu doskonale losowego powinny różnić się w zakresie określonym wariancją σ^2_{LN} statystyki $\chi^2(N)_{LN}$.

5. Statystyki $\chi^2(N)_{LN}$ i $\chi^2(n, N)_P$ mogą zatem być uznane za samodzielne statystyczne miary doskonałości ciągów losowych i w taki sposób wykorzystywane, ale z punktu widzenia teorii informacji mają dużo głębsze znaczenie. Dowodzą bowiem analitycznie, że istnieje niezależna od liczebności n zbieżność entropii próby ciągu doskonale losowego do entropii oczekiwanej i pozwalają określać ją praktycznie. Nie ma w tym jednak niczego dziwnego, skoro wszystkie opierają się na tym samym modelu probabilistycznym w postaci dyskretnego rozkładu równomiernego oraz na analizach i obliczeniach wariancji ciągów zmiennych losowych o dowolnych wymiarach N . Warto jednak wspomnieć, że zdaniem Kołmogorowa „teoria informacji powinna wychodzić przed probabilistykę, a nie opierać się na niej” (Johnson, 2004, s. 8).
6. Niezależnie od interpretacji pochodzenia statystyki $\chi^2(N)_{LN}$ i $\chi^2(n, N)_P$ pozwalają według tych samych kryteriów i wartości jednoznacznie kwalifikować próby ciągów doskonale losowych i dyskwalifikować próby ciągów niedoskonale losowych, ponieważ powyższe wnioski i zależności dotyczą tylko ciągów doskonale losowych, a w przypadku ciągów niedoskonale losowych nie są zgodne.

10. Kryterium zgodności testu chi-kwadrat dla rzeczywistego ciągu doskonale losowego

Z matematycznego punktu widzenia wyniki pomiarów statystyk $\chi^2(n, N)_P$ dla ciągów doskonale losowych świadczą o tym, że jeśli losowość ciągu jest bliska doskonałości, to ich wartości dla wszystkich N -wymiarowych zmiennych losowych są bliskie oczekiwanej wartości $\chi^2(N)_{LN} = 1$, a skupienie wokół wartości oczekiwanej jest tym lepsze, im większe są liczebność próby n i wymiar testowanej zmiennej losowej N . Wyniki te mają ścisły związek z teoriainformacyjną analizą entropii Shannona, która korzysta z tego samego modelu probabilistycznego, ale pozwala prościej zinterpretować zjawisko losowości i wyrazić je globalną miarą w postaci entropii informacyjnej. To przenikanie się różnych nauk, prowadzące do wzajemnie zgodnych i konkretnych wyników, dających się ponadto zweryfikować pomiarowo, można uznać za największą zaletę proponowanej metody. W związku z tym powstaje pytanie, na podstawie jakich konkretnych kryteriów liczbowych powinna następować kwalifikacja doskonałości losowości prób generowanych ciągów losowych.

Na wstępie można powiedzieć, że użytkowników prób ciągów losowych w kryptografii, naukach technicznych i zapewne wielu innych zwykle nie interesuje, jak zostały one wygenerowane i wedle jakiego kryterium zostały zweryfikowane. Chcą tylko wiedzieć, czy na podstawie opinii ekspertów z dziedziny matematyki mogą przyjąć *a priori*, że są to faktycznie próby ciągów doskonale losowych, ponieważ konsekwencje użycia ciągów o potencjalnej nielosowości *a posteriori* mogą być fatalne – od fałszywych wyników badań naukowych po zagrożenie bezpieczeństwa kryptograficznego.

Dlatego należy zadać sobie pytanie, czy taka weryfikacja powinna polegać na przeprowadzeniu przez zaufanego eksperta klasycznej procedury testowania hipotezy statystycznej wobec każdej wygenerowanej próby ciągu, np. na podstawie hipotezy zerowej i alternatywnej, poziomu istotności i obszaru krytycznego statystyki testowej oraz innych pojęć takiej weryfikacji, czy może powinna opierać się na innych kryteriach, nieniosących ze sobą choćby werbalnie poczucia probabilistycznej niepewności wyniku takiej weryfikacji. Rozstrzygnięcia tego problemu nie ułatwiają trwające od wielu lat wśród statystyków dyskusje na temat ułomności procedury testowania istotności statystycznej hipotezy zerowej czy kryteriów wyboru poziomu istotności dla różnych rodzajów badań, zmierzające do całkowicie nowego zdefiniowania istotności statystycznej (Szreder, 2019, 2022). Problematyka ta, dotychczas tylko wzmiankowana w literaturze przedmiotu, znalazła ostatnio rzeczową i spójną postać monograficzną (Szreder i Kozłowski, 2024).

Wycofana rekomendacja NIST dla zestawu testów *A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Application* opierała się właśnie na takich procedurach, a jednym z zasadniczych zarzutów wobec ich kryteriów była nietransparentność przyjętych wartości p , które w ogólności binarnie kwalifikowały badaną próbę jako spełniającą arbitralnie przyjęte kryteria losowości, ale w szczególności niczego nie mówiły o poziomie losowości danej próby, poza tym że przy kryterium $p > 0,01$ została ona w danym teście zakwalifikowana jako losowa. Krytykę takiego podejścia można zresztą znaleźć w wielu innych współczesnych publikacjach.

W praktyce decyzyjnej często wymagane jest binarne rozstrzygnięcie „tak – nie”, ale nie oznacza to, że sama wartość p może przesądzić o tym, czy decyzja jest poprawna. Szeroko stosowana kategoria „istotności statystycznej” (zwykle interpretowana jako „ $p < 0,05$ ”) w sensie licencji na uznanie wniosków naukowych (lub na sugerowanie prawdy) prowadzi do poważnego wypaczenia procesu badawczego (Szreder, 2019, s. 55).

Co więcej, testy można było bardzo łatwo oszukać. Przykładowo dla ciągów opisanych w części 7:

- pomnożenie modulo 2 niedoskonale losowego ciągu z $s = 0,005$ i $K = 0,005$ z ciągłą sekwencją 101 ... 010 powodowało, że przed tą operacją spełniał on ok. 1/3 z 15 testów, a po niej – już 2/3 tych testów, z czego wynika, że były one wrażliwe na nierównowagę $\{0\}$ i $\{1\}$, ale już nie zmiennych losowych o wymiarze $N \geq 2$, bo przecież statystyki takich zmiennych nie ulegają zmianie po tego rodzaju operacji;
- niedoskonale losowe ciągi z $s < 0,0005$ i $K < 0,0005$ spełniały wszystkie 15 testów, i to niezależnie od liczebności prób.

Nietrudno się domyślić, jakie zawodowe i etyczne rozterki może przeżywać przy takich wynikach konstruktor generatora ciągów losowych, który zwykle zna jego niedoskonałości, ale otrzymuje w każdym teście ocenę *passed*. Oczywiście w znacznie gorszej sytuacji byłby użytkownik ciągów z takiego generatora, ponieważ również

otrzymałby wyniki z oceną pozytywną, a używałby ciągów *de facto* nielosowych. Należy jednak zakładać, że konstruktor nie dopuści się takiego nadużycia zaufania wobec użytkownika, a w przypadku poddania generatora procedurze certyfikacji przez służby ochrony państwa nie byłoby szans na uzyskanie dla niego certyfikatu, ponieważ konstruktor jest prawnie zobowiązany do wskazania znanych sobie słabych miejsc w konstrukcji, a ich ujawnienie wyklucza skuteczne przeprowadzenie dowodu bezpieczeństwa kryptograficznego.

Podobne dylematy można by mnożyć. Warto powiedzieć jeszcze o dwóch, związanych z użytkowaniem. Potrzeby ilościowe w przypadku profesjonalnych zastosowań ciągów losowych są dzisiaj ogromne, liczone w gigabajtach, a użytkownik zwykle nie chce zbyt długo czekać na wygenerowanie ciągów, ich testowanie i wnioskowanie statystyczne, zwłaszcza przez osoby trzecie. Odpowiedzialność za niepoprawne wygenerowanie ciągów, ich testowanie i wnioskowanie statystyczne może mieć wymiar moralny w zastosowaniach naukowych, ale np. w kryptografii pociąga odpowiedzialność prawną, jeśli w wyniku błędów zostaną poniesione straty materialne czy szkody społeczne. Z powyższych powodów należy przyjąć następujące założenia do oceny:

- matematycznym kryterium oceny powinna być statystyka $\chi^2(N)_{LN}$, za którą stoją interdyscyplinarność, jasność i prostota koncepcyjna oraz łatwość weryfikacji pomiarowej;
- zastosowania ciągów losowych są dużej wagi i należy wykluczyć wzięcie do danego zastosowania próby ciągu, co do której istnieje jakakolwiek wątpliwość dotycząca jej doskonałej losowości. W opozycji do zasady domniemania niewinności (czyli „lepiej uwolnić winnego niż skazać niewinnego”) dla próby ciągu należy przyjąć zasadę domniemania nielosowości (innymi słowy, „lepiej odrzucić próbę ciągu doskonale losowego niż zaakceptować próbę ciągu nielosowego”). Powyższe założenie skutkuje tylko wydłużonym czasem generowania ciągów i pomiarów, gdyby któreś próby były dyskwalifikowane i odrzucane.

Najprościej i najbezpieczniej jest ustawić kryterium spełnienia testu na bezwarunkowej wartości $\chi^2(n, N)_P = 1 \pm \varepsilon_N$, gdzie ε_N będzie arbitralnie wybranym, bezpiecznym odchyleniem, wynikającym z doświadczeń weryfikacji wielu prób ciągów bezdyskusyjnie bliskich losowej doskonałości. Muszą temu podlegać testy każdej N -wymiarowej zmiennej losowej, tzn. kiedy dla danej próby wszystkie wartości spełnią kryterium $\chi^2(n, N)_P = 1 \pm \varepsilon_N$, ponieważ jego niespełnienie choćby dla jednej dowolnej N -wymiarowej zmiennej może oznaczać jakiś specyficzny typ nielosowości, który wyklucza uznanie danej próby za realizację ciągu doskonale losowego. Takie podejście można łatwo zalgorytmizować i będzie ono satysfakcjonowało zwłaszcza tych użytkowników, którzy – samodzielnie weryfikując ciągi – chcą mieć jednoznaczną odpowiedź na pytanie, czy dana próba ciągu spełnia kryterium losowej doskonałości.

Wartość ε_N będzie oczywiście inna dla każdego wymiaru zmiennej losowej N . Ponieważ wyniki podane w tabl. 3 są przedziałami, które w trakcie obserwacji rzadko

były przekraczane, to przyjmując kryterium $3\sigma = 3 \times 2^{-(N-1)/2}$, można założyć prawdopodobieństwo $P < 0,003$ i dopuścić 3 błędne decyzje o uznaniu ciągu losowego za nielosowy na 1000 wykonanych testów. Nie stanowiłoby to oczywiście o uznaniu generatora takiego ciągu za niespełniający wymagań, ponieważ powtórzenie badania z tymi samymi kryteriami wyklucza powtórzenie oceny negatywnej.

Propozycje dopuszczalnych wartości statystyki $\chi^2(n, N)_P$ dla rzeczywistych ciągów doskonale losowych przedstawiono w tabl. 7. Formalnymi kryteriami weryfikacji i klasyfikacji danej próby ciągu jako ciągu doskonale losowego są wartości zawarte w ostatnim wierszu tabl. 7. W przypadku gdy liczebność próby nie może wynosić 1 GB, można testować mniejsze próby z tymi samymi kryteriami, ale próby, które nie będą się mieściły w proponowanych przedziałach, należy odrzucać, zgodnie z zasadą domniemania nielosowości.

Tabl. 7. Dopuszczalne wartości statystyki $\chi^2(n, N)_P$ dla rzeczywistych ciągów doskonale losowych

Rozmiar próby w MB	$\chi^2(N=1)_P =$ $= 1 \pm \varepsilon_1$	$\chi^2(N=2)_P =$ $= 1 \pm \varepsilon_2$	$\chi^2(N=4)_P =$ $= 1 \pm \varepsilon_4$	$\chi^2(N=8)_P =$ $= 1 \pm \varepsilon_8$	$\chi^2(N=16)_P =$ $= 1 \pm \varepsilon_{16}$	$\chi^2(N=20)_P =$ $= 1 \pm \varepsilon_{20}$
1	0÷4	0÷4	0,6÷1,4	0,7÷1,5	0,98÷1,02	0,995÷1,005
10	0÷4	0÷4	0,7÷1,3	0,8÷1,3	0,98÷1,02	0,998÷1,002
100	<1	<1	0,7÷1,3	0,85÷1,2	0,99÷1,01	0,998÷1,002
1 000	<1	<1	0,8÷1,2	0,9÷1,1	0,99÷1,01	0,998÷1,002
σ_N	1,00	0,71	0,35	0,088	0,0055	0,00135
$3\sigma_N = \varepsilon_N$	3,00	2,12	1,06	0,265	0,0166	0,00405
$1 \pm \varepsilon_N$ dla 1 GB	0÷4,0	0÷3,12	0÷2,06	0,735÷1,265	0,983÷1,017	0,996÷1,004

Źródło: opracowanie własne.

Wybór liczebności próby do takich badań jest uwarunkowany trzema czynnikami:

- wydajnością generatora ciągów – jeśli jest ona ograniczona do wartości $BR = b$ (elementów na sekundę), to czas generowania próby o liczebności n będzie trwał $t = n / BR$ i przykładowo dla typowego generatora sprzętowego o $BR = 8$ Mbit/s na próbę $n = 8 \times 1\,048\,576$ elementów (1 MB) trzeba poczekać ok. 1 s, ale na próbę $n = 8 \times 1\,048\,576\,000$ elementów (1 GB) – już 1000 s, czyli ponad kwadrans. Te czasy znacznie się skrócą w przypadku nowoczesnych generatorów kwantowych, których wydajność będzie sięgała $BR = 1$ Gbit/s, co dla powyższych liczebności skróci je do odpowiednio $t = 0,008$ s i $t = 8$ s;
- czasem testowania ciągów – sprzętowe możliwości użytego komputera i oprogramowanie do obliczeń ograniczają czas weryfikacji losowości próby ciągu. Można szacować, że na współczesnym komputerze z optymalizowanym oprogramowaniem wynosi on do 10 min na 1 GB ciągu. Nie jest to dużo w przypadku jednej próby o liczebności 100 MB, ale przy kilku próbach o liczebności 1 GB czas wydłuży się nawet do godziny;
- potrzebami operacyjnymi użytkownika ciągów – jeśli badacz wykonujący np. symulacje stochastyczne potrzebuje próby o liczebności $n = 8 \times 1\,048\,576\,000$

elementów (1 GB), to dysponując generatorem o wydajności BR = 8 Mbit/s, musi na nią poczekać kwadrans, zweryfikować ją testem $\chi^2(n, N)_P$ i po pozytywnym wyniku testu może w całości użyć do swoich celów. Nieco inna jest sytuacja kryptologa – on też powinien wygenerować próbę o jak największej liczebności i przetestować ją, aby się upewnić, że w całości reprezentuje ona doskonałą losowość, a następnie wybrać z niej podciągi o takiej liczebności, jakich potrzebuje. Są to zwykle klucze szyfrujące o liczebności $n = 256$ lub 512 elementów czy ciągi do poszukiwań liczb pierwszych o liczebności n od 1000 do 2000 elementów. Kryptolog nie może jednak poprzestać na wygenerowaniu próby o mniejszej liczebności, ponieważ musi mieć absolutną gwarancję, że używane przez niego ciągi pochodzą z próby ciągu doskonale losowego.

Wstępna weryfikacja autorska dała wyniki przedstawione w tabl. 8. Zbadano 40 prób ciągów o liczebności 1 GB każda, uznanych za doskonale losowe. Dla czytelnego porównania w dwóch głównych kolumnach zamieszczono wyniki tylko dla wymiarów $N = 1, 2, 8$ i 16 . Pogrubioną czcionką został zaznaczony kierunek odchylenia w przypadku przekroczenia kryterium przez daną próbę, odpowiednio:

- w lewej kolumnie dla kryterium $\chi^2(n, N)_P = 1 \pm \varepsilon_N = 1 \pm \sigma_N$;
- w prawej kolumnie dla kryterium $\chi^2(n, N)_P = 1 \pm \varepsilon_N = 1 \pm 3\sigma_N$.

Tabl. 8. Wartości statystyk $\chi^2(n, N)_P$ dla 40 prób rzeczywistych ciągów doskonale losowych

Próby	$\chi^2(n=1\text{ GB}, N)_P = 1 \pm \varepsilon_N = 1 \pm \sigma_N$				$\chi^2(n=1\text{ GB}, N)_P = 1 \pm \varepsilon_N = 1 \pm 3\sigma_N$			
	$\chi^2(N=1)_P$ $= 1 \pm \sigma_1$	$\chi^2(N=2)_P$ $= 1 \pm \sigma_2$	$\chi^2(N=8)_P$ $= 1 \pm \sigma_8$	$\chi^2(N=16)_P$ $= 1 \pm \sigma_{16}$	$\chi^2(N=1)_P$ $= 1 \pm 3\sigma_1$	$\chi^2(N=2)_P$ $= 1 \pm 3\sigma_2$	$\chi^2(N=8)_P$ $= 1 \pm 3\sigma_8$	$\chi^2(N=16)_P$ $= 1 \pm 3\sigma_{16}$
σ_N	1,00	0,71	0,088	0,0055
$3\sigma_N$	3,00	2,12	0,265	0,0166
$1 \pm \varepsilon_N$	0,0÷2,0	0,29÷1,71	0,912÷ ÷1,088	0,9945÷ ÷1,0055	0,0÷4,0	0,0÷3,12	0,735÷ ÷1,265	0,983÷ ÷1,017
1	↑ 4,398	↑ 2,755	1,069	0,996	↑ 4,398	2,755	1,069	0,996
2	↑ 4,010	↑ 2,105	1,071	↑ 1,007	4,010	2,105	1,071	1,007
3	0,212	0,629	1,038	0,998	0,212	0,629	1,038	0,998
4	0,542	1,357	↑ 1,111	0,997	0,542	1,357	1,111	0,997
5	1,341	0,830	1,032	0,996	1,341	0,830	1,032	0,996
6	1,848	1,127	0,987	↑ 1,007	1,848	1,127	0,987	1,007
7	0,736	0,606	1,004	0,995	0,736	0,606	1,004	0,995
8	0,388	0,358	↓ 0,893	↑ 1,010	0,388	0,358	0,893	1,010
9	↑ 3,192	1,113	1,003	0,992	3,192	1,113	1,003	0,992
10	1,942	↑ 2,599	↓ 0,767	1,003	1,942	2,599	0,767	1,003
11	0,006	0,621	0,990	1,000	0,006	0,621	0,990	1,000
12	1,117	0,504	0,935	1,000	1,117	0,504	0,935	1,000
13	0,118	↓ 0,149	↓ 0,863	1,006	0,118	0,149	0,863	1,006
14	0,075	↓ 0,100	0,932	1,000	0,075	0,100	0,932	1,000
15	0,027	0,636	1,036	0,995	0,027	0,636	1,036	0,995
16	1,812	1,477	↓ 0,868	0,996	1,812	1,477	0,868	0,996

Tabl. 8. Wartości statystyk $\chi^2(n, N)_P$ dla 40 prób rzeczywistych ciągów doskonale losowych (dok.)

Próby	$\chi^2(n = 1 \text{ GB}, N)_P = 1 \pm \varepsilon_N = 1 \pm \sigma_N$				$\chi^2(n = 1 \text{ GB}, N)_P = 1 \pm \varepsilon_N = 1 \pm 3\sigma_N$			
	$\chi^2(N = 1)_P = 1 \pm \sigma_1$	$\chi^2(N = 2)_P = 1 \pm \sigma_2$	$\chi^2(N = 8)_P = 1 \pm \sigma_8$	$\chi^2(N = 16)_P = 1 \pm \sigma_{16}$	$\chi^2(N = 1)_P = 1 \pm 3\sigma_1$	$\chi^2(N = 2)_P = 1 \pm 3\sigma_2$	$\chi^2(N = 8)_P = 1 \pm 3\sigma_8$	$\chi^2(N = 16)_P = 1 \pm 3\sigma_{16}$
17	0,596	0,481	↑ 1,144	0,996	0,596	0,481	1,144	0,996
18	↑ 2,707	1,149	↑ 1,094	0,998	2,707	1,149	1,094	0,998
19	0,526	0,793	↓ 0,867	1,001	0,526	0,793	0,867	1,001
20	0,570	0,454	0,936	↑ 1,009	0,570	0,454	0,936	1,009
21	0,958	0,921	1,020	1,001	0,958	0,921	1,020	1,001
22	1,996	1,733	0,974	1,001	1,996	1,733	0,974	1,001
23	0,055	↓ 0,203	1,033	↑ 1,007	0,055	0,203	1,033	1,007
24	↑ 3,083	1,480	1,047	0,997	3,083	1,480	1,047	0,997
25	0,121	0,453	0,986	0,998	0,121	0,453	0,986	0,998
26	0,096	1,494	↓ 0,824	1,004	0,096	1,494	0,824	1,004
27	1,223	0,512	↑ 1,196	1,000	1,223	0,512	1,196	1,000
28	0,000	0,491	↑ 1,260	1,001	0,000	0,491	1,260	1,001
29	↑ 3,343	↑ 1,914	0,949	0,998	3,343	1,914	0,949	0,998
30	0,643	0,510	↑ 1,106	1,001	0,643	0,510	1,106	1,001
31	0,710	0,568	↑ 1,131	0,995	0,710	0,568	1,131	0,995
32	0,033	↓ 0,270	1,042	0,995	0,033	0,270	1,042	0,995
33	0,315	↓ 0,272	↑ 1,123	↓ 0,988	0,315	0,272	1,123	0,988
34	0,005	↓ 0,074	0,968	0,996	0,005	0,074	0,968	0,996
35	0,542	0,973	0,940	1,004	0,542	0,973	0,940	1,004
36	0,309	↓ 0,109	↓ 0,802	1,001	0,309	0,109	0,802	1,001
37	0,221	↓ 0,074	1,019	0,998	0,221	0,074	1,019	0,998
38	0,820	0,462	1,043	1,000	0,820	0,462	1,043	1,000
39	1,028	1,068	↑ 1,102	1,000	1,028	1,068	1,102	1,000
40	1,062	0,800	1,087	0,997	1,062	0,800	1,087	0,997
Udział w całości w %	3,75	7,50	10,60	3,75	0,63	0	0	0
Podsumowanie	41 wyników nieco ponad kryterium $\sigma_N - 26\%$				1 wynik na granicy kryterium $3\sigma_N - 0,6\%$			

Źródło: opracowanie własne.

Kryterium $\chi^2(n, N)_P = 1 \pm \varepsilon_N = 1 \pm \sigma_N$ spełnia ponad 74% wyników testów. Wyniki, które go nie spełniają, mają typowo incydentalny charakter, tzn. nie dotyczą wszystkich zmiennych losowych, a zwykle jednej, osiem razy dwóch, a tylko w trzech przypadkach trzech zmiennych. Należy jednak zauważyć, że otrzymane wartości były na granicy kryterium i gdyby przyjąć je choćby jako $1,5\sigma_N$, ich liczba zmniejszyłaby się do zaledwie kilku.

Kryterium $\chi^2(n, N)_P = 1 \pm \varepsilon_N = 1 \pm 3\sigma_N$ spełniają w zasadzie wszystkie wyniki testów – zaledwie jeden przekroczył kryterium o niecałe 10%.

Można zatem przyjąć, że wyniki te odpowiadają z dobrym przybliżeniem kryteriom σ_N i $3\sigma_N$, właściwym rozkładowi normalnemu, dla którego w takich przedziałach oczekuje się odpowiednio 68,3% i 99,7% wyników. Niewielka różnica między 74% wyników testów i 68,3% właściwych rozkładowi normalnemu dla kryterium σ_N wynika prawdopodobnie z tego, że wariancja lewego ogona statystyki $\chi^2(N)_{LN}$ jest ograniczona wartością zerową i w tym zawężonym przedziale mieszczą się wszystkie wyniki

pomiarów, które dodają się do nominalnych 68,3%. Uzyskane wyniki kolejny raz potwierdzają poprawność przeprowadzonych analiz teoretycznych i dobrą zgodność założonego kryterium pomiarowego.

Poczynione ustalenia prowadzą do wniosku, że w badaniu losowości ciągów należy:

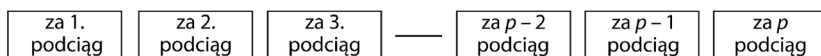
- wygenerować próbę ciągu o maksymalnej liczebności, na jaką pozwalają wydajność generatora ciągu i akceptowalny czas oczekiwania, ze wskazaniem na liczebność co najmniej $n = 1$ GB;
- sprawdzić dla wszystkich badanych wymiarów N , czy wartości $\chi^2(n, N)_P = 1 \pm \varepsilon_N$. Tylko w przypadku gdy wszystkie spełnią to kryterium, można uznać próbę za realizację ciągu doskonale losowego.

Na koniec należy rozważyć jeszcze problem stochastycznej stabilności generowanych ciągów, przez którą rozumie się ich stacjonarność i ergodyczność (Gray, 2013). Mówiąc w największym skrócie, właściwość stacjonarności w szerszym sensie można przypisać ciągom, których statystyki są takie same w każdej próbie, a ergodyczności – ciągom, których statystyki są takie same dla kolejnych podciągów danego ciągu. Ergodyczność jest zatem cechą mocniejszą i ciąg ergodyczny jest również stacjonarny, ale ciąg stacjonarny nie musi być ergodyczny.

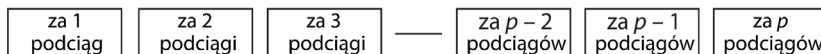
Badanie ergodyczności próby ciągu najłatwiej przeprowadzić poprzez równomierne podzielenie próby na podciągi i sprawdzenie statystyk wszystkich kolejnych podciągów, które następnie są do siebie sukcesywnie dodawane i pokazują statystykę całej próby. Łatwo zauważyć, że test $\chi^2(n, N)_P$ umożliwia takie badanie ze względu na naturę swojej statystyki pomiarowej. Ilustrację badania ergodyczności ciągu przedstawiono na schemacie.

Schemat. Badanie ergodyczności ciągu według statystyk $\chi^2(n/p, N)$

Indywidualnie – za każdy kolejny podciąg



Zbiorczo za sumę wszystkich p podciągów



Źródło: opracowanie własne.

Opisane w częściach 6–8 badania prób ciągów w sensie obserwacji bieżących wartości $\chi^2(n/p = 1 \text{ MB}, N)_P$ kolejnych podciągów o liczebności 1 MB, podsumowane wartości $\chi^2(n, N)_P$ sumy wszystkich podciągów, były właśnie badaniami ergodyczności.

Można od razu przyjąć, że bezwarunkowe uznanie próby za ergodyczną i doskonale losową następuje w przypadku jednoczesnego spełnienia wszystkich poniższych warunków:

- każdy podciąg ma wymagane statystyki $\chi^2(n/p, N)_p$, uwzględniające jego liczebność n/p ;
- cała próba ma wymagane statystyki $\chi^2(n, N)_p$, uwzględniające jej liczebność n ;
- statystyki $\chi^2(n/p, N)_p$ wszystkich podciągów mogą być rozproszone wokół statystyki całej próby $\chi^2(n, N)_p$ tylko z powodu ich ograniczonej liczebności.

Jednak błędzenie przypadkowe – zwłaszcza w próbach o bardzo dużej liczebności – może incydentalnie znacząco odchylić statystyki zmiennych losowych o dowolnych rozmiarach N od wartości oczekiwanych, co jest widoczne w tabl. 8. Próby ciągów, które są w niej opisane, były generowane jedna po drugiej, z kilkusekundowymi przerwami na zapisanie ich na dysku komputera, więc nie wystąpiły tu zakłócenia w postaci czynników starzeniowych, klimatyczno-mechanicznych czy elektromagnetycznych, które mogłyby zmieniać warunki pracy generatora wpływające na statystyki kolejnych prób ciągu i prowadzić do błędów nielosowych (ang. *non-random errors*; Szreder, 2021). Z późniejszej analizy podciągów o liczebności 1 MB wynikało, że lokalne nielosowości były okazywane przez podciągi o liczebności od kilku do kilkudziesięciu megabajtów, ale następne podciągi miały już oczekiwane statystyki, co wskazuje właśnie na incydentalne i niewielkie przekraczanie odchyłeń standardowych. A zatem raczej intuicyjna hipoteza Fellera, że „uczciwa moneta może dać niedorzeczny ciąg, w którym zmiana prowadzenia nie nastąpi w ciągu milionów kolejnych doświadczeń” (Feller, 2006, s. 87; obszerniejszy cytat został zamieszczony w części 2), ma podstawy doświadczalne, nie mając jednak źródeł analitycznych, ponieważ probabilistyka nie zna zależności, która określałaby, czy są to tysiące, czy miliony doświadczeń.

W przypadku wystąpienia lokalnych nielosowości można przyjąć dwie strategie weryfikacji:

- bezwarunkową, kiedy cała próba zostaje zdyskwalifikowana i odrzucona z powodu przekroczenia dowolnego z powyżej opisanych kryteriów;
- warunkową, kiedy z próby zostają usunięte te podciągi, w których stwierdzono przekroczenia dowolnego z kryteriów w danym podciągu.

Weryfikacja warunkowa odpowiada niezależnemu generowaniu mniej liczebnych prób i odrzucaniu prób niespełniających kryteriów. W każdym przypadku można to dopuścić, ponieważ jest poprawne matematycznie: usuwanie dowolnych podciągów z ciągu losowego nie zmienia jego losowości (a w konsekwencji – statystyk), jednak prowadzi do wygenerowania prób o mniejszej liczebności, niedających gwarancji, że okażą potencjalne nielosowości, które opisano w części 7 i zilustrowano wynikami zamieszczonymi w tabl. 5 i 6.

Przy generowaniu ciągów doskonale losowych najlepiej zatem stosować weryfikację bezwarunkową, ponieważ kosztem nielicznych zdyskwalifikowanych i odrzuconych prób, a w konsekwencji – relatywnie niewielkiego wydłużenia czasu generowania ciągów i pomiarów daje ona znacznie większą pewność braku potencjalnych nielosowości w generowanych ciągach.

11. Podsumowanie

Przedstawiona w artykule propozycja autorskiej metody testowania ciągów losowych została opracowana z intencją obiektywnej oceny tych ciągów, wolnej od specyficznych właściwości i ograniczeń dotychczas stosowanych zestawów testów. Opiera się na rzeczywistych właściwościach ciągów losowych i ich elementarnych parametrach opisywanych przez probabilistykę, statystykę i teorię informacji. Wykorzystując je, wykazano, że statystyka χ^2_{LN} dla ciągów doskonale losowych teoretycznie nie zależy od liczebności badanej próby, jest jednoparametryczna, a po normalizacji względem wymiaru zmiennej losowej N jest równa 1. Nie zmienia to istoty testu χ^2 , a tylko stawia jego statystyce wyższe wymagania, które w praktyce może spełnić jedynie ciąg doskonale losowy. Jednocześnie wykazano, że taka statystyka opisuje zgodność zbieżności entropii próby ciągu doskonale losowego względem jej wartości oczekiwanej, niezależnie od liczebności próby.

Metoda została pierwotnie opracowana jako narzędziowe wsparcie projektu kwantowego mikrofalowego generatora ciągów losowych o wydajności 1 Gbit/s, skonstruowanego w Wojskowym Instytucie Łączności w ramach własnych prac statutowych. Przewiduje się zastosowanie go jako elementu ogólnodostępnego serwera ciągów losowych do celów naukowo-technicznych. Serwer będzie umożliwiał bezpłatne pobieranie plików z ciągami losowymi, które będą miały referencyjne właściwości i parametry statystyczne potwierdzone pomiarami wykonywanymi dla każdej próby. Przewiduje się ciągłą dostępność prób ciągów o liczebności 1 GB każda. Pobrane próby będą automatycznie kasowane, co będzie stanowiło namiastkę niepowtarzalności. Skasowane próby będą zastępowane nowymi.

Pierwszym praktycznym i oficjalnym dowodem skuteczności metody było jej zastosowanie do oceny bezpieczeństwa kryptograficznego w procesie ustawowej certyfikacji prostszego generatora o wydajności 10 Mbit/s (Wojskowy Instytut Łączności, 2025), który uzyskał certyfikat nr 8/2025 wydany przez Jednostkę Certyfikującą Służby Kontrywywiadu Wojskowego i dopuszczający go do zastosowań w zakresie kryptograficznej ochrony informacji o klauzulach „ściśle tajne”, „NATO Confidential” i „Confidentiel UE” / „EU Confidential”.

Bibliografia

- Bobrowski, D. (2002). *Ciągi losowe*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza.
- Feller, W. (2006). *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Gray, R. M. (2013). *Entropy and Information Theory*. Springer.
- International Telecommunication Union. (2019). *Recommendation ITU-T X.1702: Quantum noise random number generator architecture*. <https://www.itu.int/rec/T-REC-X.1702-201911-I/en>.
- Jacak, M. M., Józwiak, P., Niemczuk, J., Jacak, J. E. (2021). Quantum generators of random numbers. *Scientific Reports*, 11, 1–21. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-95388-7>.
- Johnson, O. (2004). *Information Theory and the Central Limit Theorem*. Imperial College Press. <https://doi.org/10.1142/p341>.
- L'Ecuyer, P. (2012). Random Number Generation. W: J. Gentle, W. Härdle, Y. Mori (red.), *Handbook of Computational Statistics. Concepts and Methods* (s. 35–71). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21551-3_3.
- L'Ecuyer, P., Simard, R. (2013). *TestU01. A Software Library in ANSI C for Empirical Testing of Random Number Generators. User's Guide, compact version*. <https://simul.iro.umontreal.ca/testu01/guideshorttestu01.pdf>.
- Leśniewicz, M. (2009). *Sprzętowa generacja losowych ciągów binarnych*. Wojskowa Akademia Techniczna.
- National Institute of Standards and Technology. (2022). *Decision to Revise NIST SP 800-22 Rev. 1a*. <https://csrc.nist.gov/News/2022/decision-to-revise-nist-sp-800-22-rev-1a>.
- Rukhin, A., Soto, J., Nechvatal, J., Smid, M., Barker, E., Leigh, S., Levenson, M., Vangel, M., Banks, D., Heckert, A., Dray, J., Vo, S. (2010). *A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications*. National Institute of Standards and Technology. <https://csrc.nist.gov/pubs/sp/800/22/r1/upd1/final>.
- Shannon, C. E. (1949). Communication Theory of Secrecy Systems. *Bell System Technical Journal*, 28(4), 656–715. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1949.tb00928.x>.
- Sulewski, P. (2019). Porównanie generatorów liczb pseudolosowych. *Wiadomości Statystyczne. The Polish Statistician*, 64(11), 5–31. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0013.7605>.
- Szreder, M. (2019). Istotność statystyczna w czasach big data. *Wiadomości Statystyczne. The Polish Statistician*, 64(11), 42–57. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0013.7583>.
- Szreder, M. (2021). Błędy nielosowe i ich znaczenie w testowaniu hipotez. *Wiadomości Statystyczne. The Polish Statistician*, 66(3), 7–21. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0014.7984>.
- Szreder, M. (2022). Szanse i iluzje dotyczące korzystania z dużych prób we wnioskowaniu statystycznym. *Wiadomości Statystyczne. The Polish Statistician*, 67(8), 1–16. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0015.9704>.
- Szreder, M., Kozłowski, A. (2024). *Wnioskowanie na podstawie prób losowych i nielosowych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego.
- Wojskowy Instytut Łączności. (2025). *Sprzętowy generator ciągów losowych SGCL-1MB-2*. <https://www.wil.waw.pl/wil/oferta/produkty/ochrona-kryptograficzna/23219,Sprzetowy-Generator-Ciagow-Losowych-SGCL-1MB-2.html>.

Comparison of three-parameter models of income distribution in selected European countries

Kamila Trzcńska,^a Małgorzata Ćwiek^b

Abstract. Income distribution modelling is a fundamental tool in economic analysis, providing insight into the structure of inequality and wealth in societies. Over the years, numerous models have been proposed to capture the complex nature of income distribution. The aim of the study presented in the article is to compare selected three-parameter income distribution models, i.e. the Singh-Maddala, the Dagum and the Zenga models, in terms of their goodness of fit to empirical data. The study covers six European countries, namely: France, Germany, Hungary, Czechia, Poland and Slovakia. The analyses, based on data for 2016 from the European Quality of Life Survey, were performed for the whole country and in a breakdown into big towns, small or middle-sized towns and rural areas (in total, 24 microdata sets). To compare the estimated theoretical distributions, two different measures of goodness of fit were used: the distribution similarity coefficient (W_p) and the Mortara index (A_1). The study also examined deviations of descriptive statistics based on theoretical distributions (median, mean, the first and the ninth decile) from empirical values.

The Zenga model best fitted the empirical data the greatest number of times, but the descriptive characteristics of income distribution estimated on the basis of the Dagum distribution deviated from empirical values to a much lesser degree. Moreover, the results indicate that even very high goodness of fit to empirical data, measured by the A_1 and W_p , does not guarantee that the descriptive characteristics calculated on the basis of theoretical distribution parameters would have the same values as the empirical ones.

Keywords: Dagum distribution, Singh-Maddala distribution, Zenga distribution, measures of goodness of fit

JEL: D31, C13, C15

Porównanie trójparametrycznych modeli rozkładu dochodów w wybranych krajach europejskich

Streszczenie. Modelowanie rozkładu dochodów jest podstawowym narzędziem w analizie ekonomicznej, za pomocą którego uzyskuje się wgląd w strukturę nierówności i bogactwa w społeczeństwach. Na przestrzeni lat opracowano wiele modeli służących do uchwycenia złożonej natury rozkładu dochodów. Celem badania omawianego w artykule jest porównanie wybranych trójparametrycznych modeli rozkładu dochodów: Singha-Maddala, Daguma oraz Zengi pod względem dopasowania do danych empirycznych. Badaniem objęto sześć krajów

^a Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Instytut Statystyki i Demografii, Katedra Metod Statystycznych, Polska / University of Lodz, Faculty of Economics and Sociology, Institute of Statistics and Demography, Department of Statistical Methods, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4714-4074>.
Autor korespondencyjny / Corresponding author, e-mail: kamila.trzcinska@uni.lodz.pl.

^b Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Kolegium Ekonomii, Finansów i Prawa, Instytut Metod Ilościowych w Naukach Społecznych, Katedra Statystyki, Polska / Krakow University of Economics, College of Economics, Finance, and Law, Institute of Quantitative Methods in Social Sciences, Department of Statistics, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6375-098X>. E-mail: malgorzata.cwiek@uek.krakow.pl.

europejskich: Francję, Niemcy, Węgry, Czechy, Polskę i Słowację. Analizy, oparte na danych za 2016 r. pochodzących z Europejskiego Badania Jakości Życia, przeprowadzono zarówno dla całego kraju, jak i osobno dla mieszkańców dużych miast, małych lub średnich miast oraz obszarów wiejskich (w sumie uzyskano 24 zbiory mikrodanych). Do porównania oszacowanych rozkładów teoretycznych wykorzystano dwie miary dobroci dopasowania: współczynnik podobieństwa rozkładów (W_p) i indeks Mortary (A_1). Zbadano również odchylenia statystyk opisowych opartych na rozkładach teoretycznych (mediana, średnia, decyl pierwszy i dziewiąty) od wartości empirycznych.

Najlepsze dopasowanie do danych empirycznych wykazał model Zengi, ale charakterystyki opisowe rozkładu dochodów oszacowane na podstawie rozkładu Daguma cechowały się znacznie niższą amplitudą odchyień. Z badania wynika również, że nawet bardzo wysoka dobroć dopasowania do danych empirycznych, mierzona za pomocą A_1 i W_p , nie gwarantuje tego, że charakterystyki opisowe obliczone na podstawie teoretycznych parametrów rozkładu będą miały takie same wartości jak charakterystyki empiryczne.

Słowa kluczowe: rozkład Daguma, rozkład Singha-Maddali, rozkład Zengi, miary dobroci dopasowania

1. Introduction

Distributions of income and wealth might be described using different types of models, including empirical characteristics, e.g. histograms (Souma & Nirei, 2005), which are relatively easy to make. On the other hand, using grouped data might be a problem because of the need to close extreme class intervals, which is necessary to determine several other distribution characteristics. At the end of the 19th century, Pareto (1897) proposed a distribution of wealth and income based on the power law. In the first half of the 20th century, Gibrat (1931) clarified that this law was applicable mainly to the high-income and wealth range, while the majority followed a lognormal distribution. Theoretical models of income distribution are widely used in the economic literature (Ahmed, 2021; Al-Sabbah et al., 2021; Bhatti & Ahmad, 2019; García Pérez & Prieto Alaiz, 2011; Graf & Nedyalkova, 2014; Jamal et al., 2020; Malekzadeh & Kharrati-Kopaei, 2019; Moshrefi et al., 2018; Souma, 2001). The values of income distribution parameters within one theoretical model differ across countries and years, and depend on the adopted definition of income. However, in general, similar shapes of income distributions in different configurations mean that estimates from one empirical distribution can be used to approximate or confirm incomes from other distributions (Hlasny, 2021). An additional advantage of using theoretical models is the possibility of estimating models despite missing data. This is especially important with regard to the top (the highest) income, about which there is often a shortage of reliable information in databases (Anand & Segal, 2017; Eckerstorfer et al., 2016). Poor or distorted measurement of top household incomes can lead to misleading assessments of income inequality in a population, as well as distortions in the trends and fluctuations of inequality over time (Blanchet et al., 2018; Hlasny & Verme, 2015). The estimation of the shape of the income density function based on the regularities observed in the income distribution is invaluable

when inferring the full properties of the distribution from the available data presented in the form of aggregate statistics (Chotikapanich et al., 2007; Hajargasht & Griffiths, 2013; Pocock et al., 2002).

Income and wealth distributions can be described using theoretical distributions with different numbers of parameters. The models most often used, i.e. those with two and three parameters, are the limited versions of generalised functions with four–six (or more) parameters. Three-parameter distributions are believed to be more flexible and fit a set of empirical observations better than two-parameter ones (Kleiber & Kotz, 2003). This article focuses on the selected three-parameter distributions, namely the Dagum and the Singh-Maddala distributions (which are the special cases of the generalised beta distribution of the second kind, GB2, as shown by Chotikapanich et al., 2018) and the Zenga distribution, obtained as a mix of Poliscchio and Pareto's distributions (Zenga et al., 2012). The first two were developed in the 1970s (Kleiber, 1996), and the Zenga distribution around 2010 (Zenga et al., 2012). The above-mentioned models are considered flexible and well-fitted to empirical data (Trzcińska, 2022). According to Kleiber (1996), the Dagum income distribution provides a better fit to empirical data than the Singh-Maddala model. Nonetheless, the latter has been widely used in the economic literature to describe income distribution (Kumar, 2017). Kakamu (2016) compared the goodness of fit of the Dagum and the Singh-Maddala distributions in terms of the Akaike information criterion. As a result of simulation studies using Monte Carlo experiments, the author demonstrated that the fit of the distributions depends on two factors: the magnitudes of and the relationships between the parameters. Bandourian et al. (2003) found the Dagum model to be the best three-parameter distribution. However, they did not consider the Zenga model, as it did not exist yet. The comparison of the Dagum and the Zenga models was the subject of the work of Trzcińska (2021). On the basis of data from the 2014 Household Budget Survey, the author observed that the Zenga distribution described the distribution of wages of the Polish population better than the Dagum distribution. However, this result was based on one database only, hence further research on theoretical distributions should follow.

A precise estimation of income distribution is of key importance, because the parameters of distributions are used not only for their own inference, but also for the measurement of poverty and inequality, e.g. for the Gini coefficient (Chotikapanich & Griffiths, 2000; Eckernkemper & Gribisch, 2021). The aim of the study presented in the article is to compare the selected three-parameter income distribution models, i.e. the Singh-Maddala, the Dagum and the Zenga models, in terms of their goodness of fit to empirical data. The study, in addition, checks how individual distributions perform on relatively small samples.

2. Research method

2.1. Theoretical three-parameter models of income distributions and their fit to empirical data

Three-parameter models are characterised by very high accuracy of empirical distributions. The family of distributions proposed by Singh and Maddala (1976) depict empirical data (income and expenditure) relatively precisely. The probability density of three-parameter Singh-Maddala distribution has the following form (Kleiber, 1996):

$$f(x; a; b; q) = \frac{aqx^{a-1}}{b^a \left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{1+q}}, \quad x > 0, \quad (1)$$

where $a, b, q > 0$.

Its cumulative density function can be expressed by:

$$F(x; a; b; q) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{-q}, \quad x > 0. \quad (2)$$

The k -th moment of the analysed distribution exists for $-a < k < aq$, and is equal to:

$$E(X^k) = \frac{b^k B(1+k/a, q-k/a)}{B(1, q)} = \frac{b^k \Gamma(1+k/a) \Gamma(q-k/a)}{\Gamma(q)}, \quad (3)$$

where $B(p, q)$ and $\Gamma(p)$ are the beta and gamma functions.

In particular, the expected value of the Singh-Maddala distribution is:

$$E(X) = \frac{b \Gamma(1+1/a) \Gamma(q-1/a)}{\Gamma(q)}. \quad (4)$$

The Dagum distribution (1977) is one of the most common models used to describe wages and income. It was created on the basis of empirical observations. The probability density function of the Dagum distribution has the following form (Kleiber & Kotz, 2003):

$$f(x; a; b; p) = \frac{apx^{ap-1}}{b^{ap} \left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{p+1}}, \quad x > 0, \quad (5)$$

where $a, b, p > 0$.

The cumulative density function of this distribution is described by the equation:

$$F(x; a; b; p) = \left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{-p}, \quad x > 0, \quad (6)$$

where $a, b, p > 0$. The parameter b is a scale parameter, while a and p are shape parameters.

The k -th moment of the Dagum distribution exists for $-ap < k < a$, and is equal to:

$$E(X^k) = \frac{b^k B(p + k/a, 1 - k/a)}{B(p, 1)} = \frac{b^k \Gamma(p + k/a, 1 - k/a)}{\Gamma(p)}, \quad (7)$$

where $B(p, 1)$ and $\Gamma(p)$ are the beta and gamma functions.

Hence, the expected value of the analysed distribution is:

$$E(X) = \frac{b\Gamma(p + 1/a)\Gamma(1 - 1/a)}{\Gamma(p)}. \quad (8)$$

The third model used in our study is the Zenga distribution, introduced in 2010 (Zenga, 2010; Zenga et al., 2012). The probability density function $f(x; \mu; \alpha; \theta)$ in the Zenga distribution has been obtained as a mixture of Poliscichio's (2008) following truncated Pareto density (Zenga et al., 2012):

$$v(x; \mu; k) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\mu}}{2} k^{0.5} (1 - k)^{-1} x^{-1.5}, & \text{if } \mu k \leq x \leq \frac{\mu}{k}; \mu > 0, 0 < k < 1 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (9)$$

with a fixed $\mu > 0$ and all the values of k in the interval $(0; 1)$. The density of the parameter k is expressed by the beta density and has the following form:

$$g(k; \alpha; \theta) = \begin{cases} \frac{k^{\alpha-1} (1 - k)^{\theta-1}}{B(\alpha; \theta)}, & \text{if } 0 < k < 1; \theta > 0 \alpha > 0 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (10)$$

where $B(\alpha; \theta)$ is the beta function.

The model is characterised by the probability density function $f(x; \mu; \alpha; \theta)$, for non-negative variables:

$$f(x; \mu; \alpha; \theta) = \int_0^1 v(x; \mu; k)g(k; \alpha; \theta)dk =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\mu B(\alpha; \theta)} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{-1.5} \int_0^{\frac{x}{\mu}} k^{\alpha-0.5}(1-k)^{\theta-2} dk, & \text{for } 0 < x < \mu \\ \frac{1}{2\mu B(\alpha; \theta)} \left(\frac{\mu}{x}\right)^{1.5} \int_0^{\frac{\mu}{x}} k^{\alpha-0.5}(1-k)^{\theta-2} dk, & \text{for } x > \mu, \end{cases} \quad (11)$$

where $\mu > 0$; $\alpha > 0$; $\theta > 0$ and $B(\alpha; \theta)$ denotes the beta function.

In the case of $\theta > 0$, the cumulative density function $F(x; \mu; \alpha; \theta)$ is described by the equation:

$$F(x; \mu; \alpha; \theta) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \theta)} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ IB\left(\frac{x}{\mu}; \alpha + i - 1; \theta\right) - \left(\frac{\mu}{x}\right)^{0.5} IB\left(\frac{x}{\mu}; \alpha + i - 0.5; \theta\right) \right\} & \text{if } 0 < x \leq \mu \\ 1 - \frac{1}{B(\alpha, \theta)} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\mu}{x}\right)^{0.5} IB\left(\frac{\mu}{x}; \alpha + i - 0.5; \theta\right) - IB\left(\frac{\mu}{x}; \alpha + i; \theta\right) \right\} & \text{if } \mu < x, \end{cases} \quad (12)$$

where:

$$IB(x; \alpha; \theta) = \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\theta-1} dt, \quad 0 < x < 1 \quad (13)$$

is the incomplete beta function.

The k -th moment of the analysed distribution exists for $k \in \mathbb{N}$, $k < \alpha + 1$ and equals to:

$$E(X^k) = \begin{cases} \frac{\mu^k}{2k-1} \frac{1}{B(\alpha, \theta)} \{B(\alpha-k+1, \theta-1) - B(\alpha+k, \theta-1)\}, & \text{if } \theta > 1 \\ \frac{\mu^k}{2k-1} \frac{1}{B(\alpha, \theta)} \sum_{i=1}^{2k-1} B(\alpha-k+i, \theta), & \text{if } \theta > 0. \end{cases} \quad (14)$$

The expected value $E(X)$ is always equal to parameter μ .

The density function of three-parameter models of income distributions is very flexible and its plot can have different shapes depending on the values of the parameters.

The Singh-Maddala and Dagum models were fitted to individual income data using the maximum likelihood estimation. D'Addario invariant methods were adopted to fit the Zenga model to empirical data. Both estimation methods required the employment of numerical optimisation using the Mathematica program. Table 1 contains empirical statistics for the income used in the analysis.

To find the degree of adjustments of a theoretical distribution to the empirical one, the goodness of fit measures, the distribution similarity coefficient W_p and the Mortara index A_1 were calculated. The distribution similarity coefficient was first proposed by the Polish economist, demographer and statistician Egon Vielrose in 1960. For the empirical data arranged into a grouped frequency distribution with s -class intervals, it can be calculated according to a simple formula (Vielrose, 1960):

$$W_p = \sum_{j=1}^s \min \{n_j, \hat{n}_j\}, \quad (15)$$

where n_j and \hat{n}_j represent empirical and theoretical relative frequencies, respectively. The bigger the value of W_p ($0 \leq W_p \leq 1$), the higher the consistency of the compared distributions. The value of this coefficient may vary depending on the number of intervals used in the calculations and their values.

Another measure of fit is described by the following formula (Zenga, 2010):

$$A_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^s |n_j - \hat{n}_j|. \quad (16)$$

The Mortara index A_1 has values in the range $[0,1]$. The lower the value of this index, the higher the consistency of the compared distributions.

2.2. Income data

These models were chosen in such a way as to compare the two most commonly used three-parameter distributions employed to describe income, wages, expenses and wealth with a distribution that is still relatively new and not so widely used, yet seems to be very useful. The study was performed on the basis of disposable income per person in six European economies: France, Germany, Hungary, Czechia, Poland and Slovakia. These countries were selected with representing economies of different sizes and levels of development in mind, i.e. the countries from Western as well as Central and Eastern Europe. In addition to income distributions for entire populations, ones

for cities, small or middle-sized towns and rural areas were estimated in order to increase the number of data sets. The size of the place of residence was chosen as a variable separating subsets in the analysed countries due to the urban-rural income gap. The difference in income level and inequality between people living in urban and rural areas is widely described in the literature (Kozera et al., 2014; Shucksmith et al., 2009; Thiede et al., 2020; Zhong et al., 2022). This way, the total number of 24 datasets was obtained, coming from different societies with diverse levels of income and inequality, and thus producing different sample sizes (there were 1,371 observations in the largest subset and only 121 in the smallest one).

To achieve the aim of the study, we used microdata from the most recent round of the European Quality of Life Survey (EQLS) from 2016. The EQLS contains information about the living conditions and the social situation of European citizens, including subjective wellbeing, the quality of public services and the quality of society. Depending on the size of the country and the national conditions, the sample ranged from 600 to 1,400 people in each country. The target population was adults whose usual place of residence was in the country surveyed. Respondents were selected using a stratified clustered multistage sample design. The sample in each country was divided into strata defined by the region and the degree of urbanisation (Eurofound, 2017). The variable used for estimations was disposable income per person expressed in euros according to the purchasing power parity (PPP). The variable was defined as the total income of a household available for spending or saving, divided by the number of household members. Observations with negative and zero incomes were excluded from the analysis – this affected less than 1.5% of all observations for all of the data set. Table 1 presents selected empirical characteristics of income distributions (median, mean, first decile and ninth decile) in total (for whole populations) and by place of residence as well as the sample sizes in the analysed countries. In the EQLS study, the type of place of residence is determined by the respondent based on his/her subjective opinion.

Table 1. Empirical characteristics of disposable income per person distributions based on EQLS (in EUR according to PPP)

Place of residence	Median	Mean	D1	D9	Sample size
France					
Small or middle-sized town	580.8325	836.4996	132.4559	1,742.4976	240
Big town	677.6379	950.0415	110.4619	1,742.4976	343
Rural area or village	774.4434	1,071.7780	260.4276	1,936.1084	411
Total	688.5860	972.9630	177.4770	1,742.5000	994
Germany					
Small or middle-sized town	827.5405	946.0331	282.7430	1,688.1827	566
Big town	993.0487	1,174.1950	380.4756	2,085.4022	522
Rural area or village	814.2999	960.7440	295.5502	1,688.1827	283
Total	882.7100	1,035.9400	313.5940	1,837.1400	1371

Table 1. Empirical characteristics of disposable income per person distributions based on EQLS (cont.)

Place of residence	Median	Mean	D1	D9	Sample size
Hungary					
Small or middle-sized town	444.1380	641.6913	146.5699	1,482.3944	266
Big town	602.5993	789.6147	225.9748	1,446.2384	251
Rural area or village	392.1103	537.3574	125.5415	964.1590	220
Total	482.0790	657.5020	150.6500	1,330.8000	758
Czechia					
Small or middle-sized town	602.4096	779.4588	240.2593	1,428.5714	235
Big town	743.1651	1,024.2480	294.9068	1,936.3167	220
Rural area or village	552.0655	672.8810	227.4995	1,146.5976	231
Total	636.9990	822.0740	242.3360	1,465.1000	686
Poland					
Small or middle-sized town	364.8388	535.0523	122.7924	1,158.1368	207
Big town	519.0796	718.8425	159.6720	1,349.6070	209
Rural area or village	340.4669	456.3200	93.1602	1,361.8677	317
Total	370.7710	553.4070	119.7880	1,112.3100	733
Slovakia					
Small or middle-sized town	463.2631	609.1344	193.4090	1,134.5220	304
Big town	623.3637	845.0710	241.1824	1,782.8201	121
Rural area or village	410.5889	512.2028	148.0489	964.7295	329
Total	459.2110	604.7020	176.1680	1,134.5200	754

Note. The individual categories of the places of residence were obtained from the EQLS.

Source: authors' calculations.

The size of individual samples according to the place of residence of the population ranged from 121 (big town, Slovakia) to 566 (small or middle-sized town, Germany). As regards sample sizes of the countries, Czechia had the smallest sample (686), and Germany had the largest one (1,371).

In all countries except France, the highest average income was obtained by respondents living in big towns. The average income in cities was between 19% (Hungary) and 28% (Slovakia) higher than the average income in small and medium-sized towns. Compared to respondents living in rural areas, the differences were even greater – the average income in cities in Hungary was 47% higher than in rural areas, in Czechia by 52%, in Poland by 58%, and in Slovakia by even as much as 65%. In Germany, the difference between the average income in rural areas and in small and middle-sized towns was relatively insignificant. In France, on the other hand, the highest average income was earned by people living in rural areas, and the lowest by the residents of small and medium-sized towns. It should be remembered that the actual differences might have been greater. Allowances have to be made for the potential selective non-response, because richer regions tend to have greater non-response biases.

In all the studied groups, the median was lower than the mean, which confirms the right-hand asymmetry of the distributions. The smallest difference between the median and the average was observed in the case of people living in small or middle-

sized towns in Germany (14%), and the largest in the case of residents of small or middle-sized towns in Poland (47%). The 10th quantile most often totals about 30% of the median value, which means that 10% of the poorest respondents in a given group have the income of about 30% of the median of that group. In big towns in France, however, the 10th quantile on average totalled only 16% of the median. As regards the 10% of the richest respondents within the subsets, their income ranged from twice to four times higher than the median in their subgroup (small or middle-sized towns, Germany, and rural areas or villages, Poland, respectively).

3. Results and discussion

The results of the approximation of the empirical income distributions in the analysed countries by means of the three-parameter models, together with the goodness of fit measures, are presented in Tables 2–4.

Table 2. Estimation results of the Singh-Maddala density function and indexes of the goodness of fit

Place of residence	a	b	q	A_1	W_p
France					
Small or middle-sized town	1.2621	3,051.10	5.5624	0.178022	0.909556
Big town	1.1550	2,137.93	2.6733	0.283778	0.857894
Rural area or village	1.9809	790.71	1.1380	0.188833	0.905376
Total	1.4188	1,508.86	2.5356	0.134466	0.907597
Germany					
Small or middle-sized town	2.7679	641.38	0.6236	0.120072	0.939700
Big town	1.9955	1,676.64	2.3431	0.094180	0.952360
Rural area or village	1.8992	1,517.41	2.6472	0.140801	0.928057
Total	1.8957	1,774.25	2.9706	0.083111	0.958267
Hungary					
Small or middle-sized town	1.7131	614.04	1.5069	0.175075	0.908729
Big town	2.2120	616.70	1.1048	0.123091	0.937141
Rural area or village	1.6724	575.69	1.7057	0.174959	0.911518
Total	1.7517	649.07	1.5498	0.117492	0.940097
Czechia					
Small or middle-sized town	1.8920	905.19	1.8056	0.227210	0.885651
Big town	2.5545	632.21	0.8102	0.211035	0.892178
Rural area or village	2.2074	755.91	1.6979	0.171770	0.913185
Total	2.1904	702.65	1.2360	0.097537	0.950248
Poland					
Small or middle-sized town	2.0256	367.15	1.0150	0.146847	0.924981
Big town	2.1266	527.29	1.0602	0.136442	0.930366
Rural area or village	1.5762	573.31	2.0125	0.076279	0.961583
Total	1.7533	501.90	1.4264	0.056132	0.971257
Slovakia					
Small or middle-sized town	2.3601	448.47	0.7777	0.150660	0.917436
Big town	2.9497	485.70	0.6589	0.260820	0.866792
Rural area or village	2.0086	557.05	1.6511	0.157342	0.920247
Total	2.1011	555.52	1.3435	0.140815	0.929203

Note. As in Table 1.

Source: authors' calculations.

Table 3. Estimation results of the Dagum density function and indexes of the goodness of fit

Place of residence	a	b	p	A_1	W_p
France					
Small or middle-sized town	2.8001	1,164.97	0.3739	0.194351	0.899697
Big town	3.0510	1,393.99	0.2920	0.137961	0.930998
Rural area or village	2.1862	801.09	0.8584	0.191253	0.904142
Total	2.6756	1,171.66	0.4237	0.144665	0.927609
Germany					
Small or middle-sized town	3.0012	1,025.36	0.6378	0.155527	0.918507
Big town	3.4106	1,390.75	0.4906	0.073852	0.962086
Rural area or village	3.1783	1,110.12	0.5255	0.168008	0.912949
Total	3.5121	1,290.10	0.4518	0.109756	0.944529
Hungary					
Small or middle-sized town	2.3035	591.50	0.6567	0.171373	0.910340
Big town	2.5048	667.06	0.7913	0.118852	0.939480
Rural area or village	2.6284	581.43	0.5114	0.156070	0.921073
Total	2.4476	635.32	0.6165	0.114667	0.941406
Czechia					
Small or middle-sized town	2.8408	822.53	0.5709	0.211493	0.893247
Big town	2.2984	684.73	1.0752	0.167119	0.914800
Rural area or village	3.3476	738.35	0.5498	0.138266	0.929908
Total	2.7186	756.39	0.6943	0.089362	0.954501
Poland					
Small or middle-sized town	2.0822	379.92	0.9393	0.147217	0.924895
Big town	2.2530	542.63	0.9027	0.137101	0.930104
Rural area or village	2.4037	466.81	0.5758	0.065757	0.966501
Total	2.2334	480.64	0.7143	0.044131	0.977036
Slovakia					
Small or middle-sized town	2.7967	601.67	0.6542	0.093397	0.950302
Big town	2.1937	474.00	1.4991	0.274822	0.860556
Rural area or village	2.9041	534.62	0.5940	0.126323	0.935575
Total	2.6689	565.80	0.6963	0.132475	0.933340

Note. As in Table 1.

Source: authors' calculations.

Table 4. Estimation results of the Zenga density function and indexes of the goodness of fit

Place of residence	μ	α	θ	A_1	W_p
France					
Small or middle-sized town	836.4996	1.4565	3.5285	0.167075	0.912073
Big town	950.0415	1.5524	3.5492	0.191328	0.904237
Rural area or village	1,071.7780	1.9514	4.3436	0.184949	0.907460
Total	972.9626	1.5174	3.5292	0.056900	0.971400
Germany					
Small or middle-sized town	946.0331	2.7878	4.2090	0.194233	0.900657
Big town	1,174.1950	2.0482	3.0133	0.053512	0.971632
Rural area or village	960.7440	2.2014	3.4891	0.161042	0.916108
Total	1,035.9410	2.0620	3.0892	0.116400	0.940700
Hungary					
Small or middle-sized town	641.6913	1.5433	3.4920	0.178420	0.908747
Big town	789.6147	2.0067	3.5466	0.130463	0.934076
Rural area or village	537.3574	1.6656	3.5196	0.138556	0.929639
Total	657.5017	2.0054	4.3073	0.101300	0.948400

Table 4. Estimation results of the Zenga density function and indexes of the goodness of fit (cont.)

Place of residence	μ	α	θ	A_1	W_p
Czechia					
Small or middle-sized town	779.4588	2.0194	2.9465	0.190464	0.902981
Big town	1,024.2480	1.7709	3.4567	0.230255	0.883677
Rural area or village	672.8810	1.8984	2.6490	0.091923	0.952834
Total	822.0742	2.0000	3.0000	0.137700	0.930900
Poland					
Small or middle-sized town	535.0523	1.5175	3.5458	0.212488	0.892864
Big town	718.8425	2.0092	4.4804	0.147245	0.925199
Rural area or village	456.3200	1.5438	3.4923	0.060985	0.968947
Total	553.4071	1.5183	3.5151	0.079600	0.959500
Slovakia					
Small or middle-sized town	609.1344	2.3096	4.0751	0.093935	0.952110
Big town	845.0710	2.0810	3.9522	0.409447	0.794618
Rural area or village	512.2028	1.7403	2.9350	0.101635	0.947497
Total	604.7018	2.0004	3.2539	0.115000	0.942200

Note. As in Table 1.

Source: authors' calculations.

In the case of the Singh-Maddala distribution estimated for the whole countries, the best goodness of fit, measured both with W_p and A_1 , was obtained for Poland ($A_1 = 0.056132$, $W_p = 0.971257$) and Germany ($A_1 = 0.083111$, $W_p = 0.958267$), and the worst for Slovakia ($A_1 = 0.140815$, $w_p = 0.929203$). As for distributions estimated by the place of residence, the best goodness of fit was obtained for rural areas in Poland ($A_1 = 0.076279$, $W_p = 0.961583$) and big towns in Germany ($A_1 = 0.094180$, $W_p = 0.857894$), and the worst for big towns in Slovakia ($A_1 = 0.260820$, $W_p = 0.866792$) and big towns in France ($A_1 = 0.283778$, $W_p = 0.857894$).

The measures of goodness of fit used for the Dagum distribution indicate the best fit for Poland ($A_1 = 0.044131$, $W_p = 0.977036$) and the worst for France ($A_1 = 0.144665$, $W_p = 0.927609$). As for distributions estimated by the place of residence, the best goodness of fit was obtained for rural areas in Poland ($A_1 = 0.065757$, $W_p = 0.966501$) and big towns in Germany ($A_1 = 0.073852$, $W_p = 0.962086$), and the worst for big towns in Slovakia ($A_1 = 0.274822$, $W_p = 0.860556$) and small or middle-sized towns in Czechia ($A_1 = 0.211493$, $W_p = 0.893247$).

In case of the Zenga distribution, the best goodness of fit was observed for France ($A_1 = 0.0569$, $W_p = 0.9714$) and the worst for Czechia ($A_1 = 0.1377$, $W_p = 0.9309$). As for distributions estimated by the place of residence, the best goodness of fit was obtained for big towns in Germany ($A_1 = 0.053512$,

$W_p = 0.971632$) and rural areas in Poland ($A_1 = 0.060985$, $W_p = 0.968947$), and the worst for big towns in Slovakia ($A_1 = 0.409447$, $W_p = 0.794618$), big towns in Czechia ($A_1 = 0.230255$, $W_p = 0.883677$), and small or middle-sized towns in Poland ($A_1 = 0.212488$, $W_p = 0.892864$).

The results of the analysis show that the applied goodness of fit measures (A_1 and W_p) give consistent results. An interesting observation is also that the theoretical models estimated for rural areas in Poland and big towns in Germany are always characterised by the best fit to empirical data, regardless of the used model. The estimations for big towns in Slovakia, on the other hand, were always the worst fit to empirical data. It is probably related to the fact that the sample size in this group was the smallest. Hence, it should be assumed that a sample of approximately 120 observations is too small to estimate the parameters of the studied theoretical distributions with a satisfactory level for goodness of fit to empirical data.

When it comes to income distributions estimated for entire countries, there is no consistency between the models. Two of them, the Singh-Maddala and the Dagum models, showed the best goodness of fit for Poland, whereas the Zenga distribution was the most accurate in the case of France. Meanwhile, the Dagum distribution for France showed the worst goodness of fit. Therefore, as regards fitting distributions for entire countries, no relationship between the number of observations and the model fit was found.

Regarding the goodness of fit of distributions in selected countries, the Singh-Maddala distribution turned out to fit the empirical data best in six cases: twice for Poland (small or middle-sized towns and big towns), three times for Germany (total, small or middle-sized towns and rural areas or villages) and once for Slovakia (big towns). It yielded the weakest match for the data 12 times. The Dagum distribution was also best matched to the empirical data six times: twice for Hungary (small or middle-sized towns and big towns) and for Czechia (total and big towns), and once for France (big towns) and for Poland (total). In the remaining cases (12 out of 24), the Zenga distribution generated the best goodness of fit. However, this latter distribution produced the weakest fit to data nine times, while in the case of the Dagum distribution, it was only three times.

In the subsequent step of our analysis, we checked whether imperfections in the goodness of fit translate into the values of descriptive characteristics of the distributions. Values of the median, mean and the first and ninth deciles calculated on the basis of theoretical distributions are presented in Tables 5–7.

Table 5. Estimation results for income distributions using the Singh-Maddala distribution (in EUR, according to PPP)

Place of residence	Median	Mean	D1	D9
France				
Small or middle-sized town	615.920	836.316	132.7084	1,797.3781
Big town	745.144	1,254.160	132.2848	2,801.2894
Rural area or village	723.537	1,060.330	243.5125	2,044.1944
Total	667.502	946.092	162.7044	1,988.7384
Germany				
Small or middle-sized town	829.625	1,368.380	347.9808	2,412.4427
Big town	982.510	1,170.010	358.3106	2,169.0339
Rural area or village	804.034	960.5470	280.8428	1,802.3208
Total	876.728	1,033.790	307.6868	1,928.2020
Hungary				
Small or middle-sized town	448.612	649.005	132.6407	1,298.8749
Big town	579.888	793.667	217.8267	1,489.9941
Rural area or village	380.982	536.046	110.9745	1,078.4874
Total	468.066	658.536	142.6301	1,309.2773
Czechia				
Small or middle-sized town	605.958	776.105	204.7703	1,493.7398
Big town	711.558	1,030.450	291.9010	1,878.4960
Rural area or village	554.271	668.884	217.6169	1,220.8425
Total	616.943	812.987	232.8392	1,522.8512
Poland				
Small or middle-sized town	363.451	558.304	123.1440	1,066.1856
Big town	507.730	729.221	182.2925	1,383.0816
Rural area or village	326.224	455.011	89.7216	928.9193
Total	384.116	558.201	115.9931	1,110.3556
Slovakia				
Small or middle-sized town	523.135	840.266	197.9267	1,537.3828
Big town	599.804	886.007	268.1621	1,571.7073
Rural area or village	402.902	511.011	143.8295	967.8638
Total	460.797	604.784	168.5264	1,142.5726

Note. As in Table 1.

Source: authors' calculations.

Table 6. Estimation results for income distributions using the Dagum distribution (in EUR, according to PPP)

Place of residence	Median	Mean	D1	D9
France				
Small or middle-sized town	638.504	857.592	129.2307	1,739.3206
Big town	661.038	880.031	105.1216	1,831.8194
Rural area or village	725.400	1,062.910	242.5935	2,032.6507
Total	689.396	936.230	154.0020	1,879.8120
Germany				
Small or middle-sized town	818.749	1,002.950	310.7601	1,816.8727
Big town	997.357	1,172.820	352.1573	2,114.4666
Rural area or village	808.458	975.112	280.7836	1,782.5106
Total	893.139	1,043.200	302.7669	1,887.7029
Hungary				
Small or middle-sized town	450.085	647.166	130.7104	1,262.7777
Big town	583.017	778.071	213.4751	1,452.4205
Rural area or village	388.880	521.442	105.2884	1,019.0964
Total	471.199	650.926	139.5047	1,262.0189

Table 6. Estimation results for income distributions using the Dagum distribution (cont.)

Place of residence	Median	Mean	D1	D9
Czechia				
Small or middle-sized town	607.281	769.396	200.1026	1,442.6406
Big town	714.991	994.420	284.7556	1,841.1662
Rural area or village	559.697	659.330	212.2957	1,174.8315
Total	620.406	755.045	226.3735	1,471.2132
Poland				
Small or middle-sized town	364.244	553.191	122.2262	1,057.2663
Big town	508.981	725.368	181.3277	1,371.5144
Rural area or village	328.168	462.894	89.1166	910.3788
Total	385.240	563.423	115.5740	1,095.1105
Slovakia				
Small or middle-sized town	479.637	607.411	172.7654	1,122.6397
Big town	603.893	857.400	262.8374	1,564.7735
Rural area or village	406.756	508.115	141.7481	940.2282
Total	463.189	599.611	166.2082	1,115.5694

Note. As in Table 1.

Source: authors' calculations.

Table 7. Estimation results for income distributions of the Zenga distribution (in EUR, according to PPP)

Place of residence	Median	Mean	D1	D9
France				
Small or middle-sized town	580.8331	836.4996	150.7966	1,656.7101
Big town	677.6388	950.0415	187.9809	1,863.3072
Rural area or village	774.4434	1,071.7780	247.6063	2,118.9151
Total	698.4715	972.9626	190.7852	1,913.3949
Germany				
Small or middle-sized town	780.2320	946.0331	331.3163	1,700.0638
Big town	979.7847	1,174.1950	376.1671	2,073.7993
Rural area or village	783.4988	960.7440	300.8421	1,737.4737
Total	859.8330	1,035.9410	328.6319	1,839.4248
Hungary				
Small or middle-sized town	459.7336	641.6913	127.5409	1,160.7511
Big town	622.3187	789.6147	220.0479	1,466.8726
Rural area or village	396.4135	537.3574	118.5043	1,037.4631
Total	482.0772	657.5017	158.2620	1,289.2900
Czechia				
Small or middle-sized town	652.0640	779.4588	249.6615	1,372.7520
Big town	779.4871	1,024.2480	248.9504	1,943.0539
Rural area or village	570.4905	672.8810	216.4867	1,167.7065
Total	682.3780	822.0742	257.2524	1,458.4857

Table 7. Estimation results for income distributions of the Zenga distribution (cont.)

Place of residence	Median	Mean	D1	D9
Poland				
Small or middle-sized town	353.8860	535.0523	120.6657	1,053.4646
Big town	504.2789	718.8425	168.0200	1,424.2699
Rural area or village	326.9639	456.3200	90.7380	1,300.0000
Total	392.4600	553.4071	106.7415	1087.0841
Slovakia				
Small or middle-sized town	479.7762	609.1344	180.1855	1,484.2422
Big town	649.2727	845.0710	227.0333	2,124.0281
Rural area or village	410.5890	512.2028	137.8010	1,239.4693
Total	489.7506	604.7018	178.6988	1,097.4400

Note. As in Table 1.

Source: authors' calculations.

It is worth stressing that the Zenga model approximates the arithmetic mean with a 100% accuracy, which results from the method of estimating distribution parameters. Furthermore, the Dagum model approximates the mean better than the Singh-Maddala one. The exact percentage differences between the theoretical characteristics calculated on the basis of the estimated parameters of the analysed models and the empirical characteristics are presented in Table 8.

The Singh-Maddala distribution was best at estimating the median. It overestimated the median by more than 10% in only one of 24 cases, while in 83% of cases, the theoretical median differed from the empirical one by less than 5%. This model performed worse in the case of average estimations: three times the theoretical value deviated from the empirical one by more than 30%. The estimates of D1 and D9 were even less accurate – in six and eight cases, respectively, they differed by more than 10% from the empirical values. Moreover (especially in the case of D9), these differences were very large (a difference by even as much as 61% in the case of big towns in France).

As regards the median estimated by the Dagum distribution, no value differed by more than 10% from the empirical values, and only two differed by more than 5%. The situation was similar in the case of the mean estimated by the Dagum model – only three values deviated from the empirical ones by over 5% (but by less than 10%). The quantile estimates were slightly less accurate. In the case of D1, five deviations from empirical values by more than 10% were observed, with the greatest one equal to 17%. Regarding D9, there were three such cases, with the largest deviation amounting to 33%. It is also worth noting that all these deviations with an amplitude above 10% are negative, i.e. they lower the value of D9.

Table 8. Differences between the characteristics calculated on the basis of theoretical distributions and the empirical characteristics

Place of residence	Singh-Maddala distribution				Dagum distribution				Zenga distribution			
	median	mean	D1	D9	median	mean	D1	D9	median	mean	D1	D9
	in %											
France												
Small or middle-sized town	6.04	-0.02	0.19	3.15	9.93	2.52	-2.43	-0.18	0.00	0.00	13.85	-4.92
Big town	9.96	32.01	19.76	60.76	-2.45	-7.37	-4.83	5.13	0.00	0.00	70.18	6.93
Rural area or village	-6.57	-1.07	-6.50	5.58	-6.33	-0.83	-6.85	4.99	0.00	0.00	-4.92	9.44
Total	-3.06	-2.76	-8.32	14.13	0.12	-3.78	-13.23	7.88	1.44	0.00	7.50	9.81
Germany												
Small or middle-sized town	0.25	44.64	23.07	42.90	-1.06	6.02	9.91	7.62	-5.72	0.00	17.18	0.70
Big town	-1.06	-0.36	-5.83	4.01	0.43	-0.12	-7.44	1.39	-1.34	0.00	-1.13	-0.56
Rural area or village	-1.26	-0.02	-4.98	6.76	-0.72	1.50	-5.00	5.59	-3.78	0.00	1.79	2.92
Total	-0.68	-0.21	-1.88	4.96	1.18	0.70	-3.45	2.75	-2.59	0.00	4.80	0.12
Hungary												
Small or middle-sized town	1.01	1.14	-9.50	-12.38	1.34	0.85	-10.82	-14.81	3.51	0.00	-12.98	-21.70
Big town	-3.77	0.51	-3.61	3.03	-3.25	-1.46	-5.53	0.43	3.27	0.00	-2.62	1.43
Rural area or village	-2.84	-0.24	-11.60	11.86	-0.82	-2.96	-16.13	5.70	1.10	0.00	-5.61	7.60
Total	-2.91	0.16	-5.32	-1.62	-2.26	-1.00	-7.40	-5.17	0.00	0.00	5.05	-3.12

Table 8. Differences between the characteristics calculated on the basis of theoretical distributions and the empirical characteristics (cont.)

Place of residence	Singh-Maddala distribution				Dagum distribution				Zenga distribution			
	median	mean	D1	D9	median	mean	D1	D9	median	mean	D1	D9
	in %											
Czechia												
Small or middle-sized town	0.59	-0.43	-14.77	4.56	0.81	-1.29	-16.71	0.98	8.24	0.00	3.91	-3.91
Big town	-4.25	0.61	-1.02	-2.99	-3.79	-2.91	-3.44	-4.91	4.89	0.00	-15.58	0.35
Rural area or village	0.40	-0.59	-4.34	6.48	1.38	-2.01	-6.68	2.46	3.34	0.00	-4.84	1.84
Total	-3.15	-1.11	-3.92	3.94	-2.60	-8.15	-6.59	0.42	7.12	0.00	6.16	-0.45
Poland												
Small or middle-sized town	-0.38	4.35	0.29	-7.94	-0.16	3.39	-0.46	-8.71	-3.00	0.00	-1.73	-9.04
Big town	-2.19	1.44	14.17	2.48	-1.95	0.91	13.56	1.62	-2.85	0.00	5.23	5.53
Rural area or village	-4.18	-0.29	-3.69	-31.79	-3.61	1.44	-4.34	-33.15	-3.97	0.00	-2.60	-4.54
Total	3.60	0.87	-3.17	-0.18	3.90	1.81	-3.52	-1.55	5.85	0.00	-10.89	-2.27
Slovakia												
Small or middle-sized town	12.92	37.94	2.34	35.51	3.53	-0.28	-10.67	-1.05	3.56	0.00	-6.84	30.83
Big town	-3.78	4.84	11.19	-11.84	-3.12	1.46	8.98	-12.23	4.16	0.00	-5.87	19.14
Rural area or village	-1.87	-0.23	-2.85	0.32	-0.93	-0.80	-4.26	-2.54	0.00	0.00	-6.92	28.48
Total	0.35	0.01	-4.34	0.71	0.87	-0.84	-5.65	-1.67	6.65	0.00	1.44	-3.27

Note. As in Table 1.

Source: authors' calculations.

The Zenga model coped very well with the estimation of the median. Only five times the difference between the estimated and empirical values was greater than 5% (but always lower than 10%), and in five cases, the estimated value was identical to the empirical one, which was a unique achievement, not repeated by any of the previous models. However, the estimates of the quantile values by this model were much less accurate. For D1, in six cases the estimated values differed from the empirical ones by more than 10%, including one by more than 70%. Only in 10 cases did the estimated D1 values differ by less than 5% from the empirical ones. As regards D9, in four cases the estimated values differed from the empirical ones by more than 10% (in three of them by over 20%). A difference of less than 5% was observed for 58% of the estimated D9.

In order to check whether there is a relationship between the assessment of goodness of fit of the distribution to empirical data and the deviation of theoretical characteristics from empirical values, the linear correlation coefficient between the Mortara index and the absolute values of the theoretical deviations from empirical values were calculated. The results are presented in Table 9.

Table 9. Pearson's linear correlation coefficients between the assessment of goodness of fit and the deviation of theoretical characteristics from empirical ones

Distribution	Characteristics			
	median	mean	D1	D9
Singh-Maddala	0.3103	0.1901	0.3950	0.2838
Dagum	0.1445	-0.0160	0.2736	-0.0042
Zenga	0.1553	.	0.1904	0.1553

Source: authors' calculations.

As shown in Table 9, the relationship between the assessment of the distribution's adjustment to empirical data and the assessment of the deviation of the distribution characteristics from the empirical values is weak. The lack of the value for the mean in the Zenga distribution results from the construction of this distribution. Only for the Singh-Maddala model can it be expected that the estimated median and D1 quantile are slightly closer to the empirical values in the case of better goodness of fit to empirical data. However, it should be noted that in almost all cases in our study, the goodness of fit of theoretical distributions to empirical data was high and the analysed differences in goodness of fit were very small.

4. Conclusions

Theoretical models are an important tool for the research of income and wealth distribution. All the three-parameter income distribution models described in this study, namely the Singh-Maddala, the Dagum and the Zenga models, are widely used and offer an acceptable level of goodness of fit to empirical data. The results of model selection for the analysed countries, treated as a whole, show that for France, Hungary and Slovakia, the best-fitted model was the Zenga distribution. For Czechia and Poland it was the Dagum distribution. The Singh-Maddala model, on the other hand, was best-fitted to Germany only. When it comes to separate subsets based on the size of the place of residence, the results indicate that for Germany and Poland, the Singh-Maddala model was the best fit in most cases, for Hungary, it was the Dagum model, while for France, Czechia and Slovakia, the Zenga model was the most accurate. In general, the Zenga model fitted the data best in 12 out of 24 analysed data sets. The Singh-Maddala model offered the best fit as many times as the Dagum model.

As regards the high goodness of fit of theoretical distributions to empirical data, the accuracy of the description characteristics of the income distribution turned out to be weakly correlated with the Mortara index. From the point of view of the estimation of the parameters of the studied distributions, the Zenga model was best at estimating the median. The Dagum model performed slightly worse in this area, while the Singh-Maddala one obtained the poorest results. Regarding the D1 and D9 estimation, the Dagum model was the closest to the empirical estimates, while the Zenga and the Singh-Maddala models produced much worse results.

To sum up, it is not possible to choose one 'best' model. Although the Zenga distribution best fitted the empirical data the greatest number of times (using measures A_1 and W_p), the deviation of the parameters of income distribution estimated by the Dagum distribution from empirical values had a much lower amplitude. Moreover, our study shows that even very high goodness of fit to empirical data, measured using the Mortara index and the coefficient of the similarity of distributions, does not guarantee that the theoretical descriptive characteristics of the distribution would have the same values as the empirical ones. Our research does not point to reasons for this situation. More research is necessary in the future to find out which model would yield the best estimates in a given case.

Acknowledgements

The article presents the result of the Project no 092/EIT/2024/POT financed from the subsidy granted to the Krakow University of Economics.

References

- Ahmed, M. A. (2021). Extending Singh-Maddala Distribution. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 19(1), 1–23. <https://doi.org/10.22237/jmasm/1608553680>.
- Al-Sabbah, S. A., Mahood, M. S., & Abood, A. H. (2021). Comparison of methods for estimating the reliability of arriving for the Burr distribution. *Journal of Physics: Conference Series*, 1897, 1–22. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1897/1/012005>.
- Anand, S., & Segal, P. (2017). Who are the global top 1%?. *World Development*, 95, 111–126. <https://doi.org/10.1016/j.worlddev.2017.02.001>.
- Bandourian, R., McDonald, J. B., & Turley, R. S. (2003). A Comparison of Parametric Models of Income Distribution Across Countries and Over Time. *Estadistica*, 55, 135–152.
- Bhatti, F. A., & Ahmad, M. (2019). On the modified Singh-Maddala distribution: development, properties, characterizations and application. *Journal of Reliability and Statistical Studies*, 12(1), 79–103.
- Blanchet, T., Garbinti, B., Goupille-Lebret, J., & Martínez-Toledano, C. (2018). Applying Generalized Pareto Curves to Inequality Analysis. *AEA Papers and Proceedings*, 108, 114–118. <https://doi.org/10.1257/pandp.20181075>.
- Chotikapanich, D., & Griffiths, W. E. (2000). Applications: posterior distributions for the Gini coefficient using grouped data. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 42(4), 383–392. <https://doi.org/10.1111/1467-842X.00136>.
- Chotikapanich, D., Griffiths, W. E., Hajargasht, G., Karunaratne, W., & Rao, D. P. (2018). Using the GB2 Income Distribution. *Econometrics*, 6(2), 1–24. <https://doi.org/10.3390/econometrics6020021>.
- Chotikapanich, D., Prasada Rao, D. S., & Tang, K. K. (2007). Estimating income inequality in China using grouped data and the generalized beta distribution. *The Review of Income and Wealth*, 53(1), 127–147. <https://doi.org/10.1111/j.1475-4991.2007.00220.x>.
- Contoyannis, P., & Forster, M. (1999). The distribution of health and income: a theoretical framework. *Journal of Health Economics*, 18(5), 605–622. [https://doi.org/10.1016/S0167-6296\(99\)00002-8](https://doi.org/10.1016/S0167-6296(99)00002-8).
- Eckernkemper, T., & Gribisch, B. (2021). Classical and Bayesian Inference for Income Distributions using Grouped Data. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 83(1), 32–65. <https://doi.org/10.1111/obes.12396>.
- Eckerstorfer, P., Halak, J., Kapeller, J., Schütz, B., Springholz, F., & Wildauer, R. (2016). Correcting for the missing rich: An application to wealth survey data. *The Review of Income and Wealth*, 62(4), 605–627. <https://doi.org/10.1111/roiw.12188>.
- Eurofound. (2017). *European Quality of Life Survey 2016. Quality of life, quality of public services, and quality of society*. Publications Office of the European Union. <https://doi.org/10.2806/964014>.
- García Pérez, C., & Prieto Alaiz, M. (2011). Using the Dagum model to explain changes in personal income distribution. *Applied Economics*, 43(28), 4377–4386. <https://doi.org/10.1080/00036846.2010.491459>.
- Gibrat, R. (1931). *Les inégalités économiques*. Sirey.
- Graf, M., & Nedyalkova, D. (2014). Modeling of income and indicators of poverty and social exclusion using the generalized beta distribution of the second kind. *Review of Income and Wealth*, 60(4), 821–842. <https://doi.org/10.1111/roiw.12031>.
- Hajargasht, G., & Griffiths, W. E. (2013). Pareto-lognormal distributions: Inequality, poverty, and estimation from grouped income data. *Economic Modelling*, 33, 593–604. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2013.04.046>.

- Hlasny, V. (2021). Parametric representation of the top of income distributions: Options, historical evidence, and model selection. *Journal of Economic Surveys*, 35(4), 1217–1256. <https://doi.org/10.1111/joes.12435>.
- Hlasny, V., & Verme, P. (2015). Top Incomes and the Measurement of Inequality: a Comparative Analysis of Correction Methods using Egyptian, EU, and US Survey Data. In *ECINEQ Conference Paper*, 145.
- Jamal, F., Reyad, H. M., Ahmed, S. O., & Ali Shah, S. M. A. (2020). Mathematical properties and applications of minimum Gumbel Burr distribution. *NED University Journal of Research*, 17(2), 1–14. <https://doi.org/10.35453/NEDJR-ASCN-2018-0063>.
- Kakamu, K. (2016). Simulation studies comparing Dagum and Singh–Maddala income distributions. *Computational Economics*, 48, 593–605. <https://doi.org/10.1007/s10614-015-9538-z>.
- Kleiber, C. (1996). Dagum vs. Singh-Maddala income distributions. *Economics Letters*, 53(3), 265–268. [https://doi.org/10.1016/S0165-1765\(96\)00937-8](https://doi.org/10.1016/S0165-1765(96)00937-8).
- Kleiber, C., & Kotz, S. (2003). *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*. John Wiley & Sons.
- Kozera, A., Stanisławska, J., & Wysocki, F. (2014). Sytuacja finansowa gospodarstw domowych zamieszkujących obszary wiejskie w Polsce po wstąpieniu Polski do Unii Europejskiej. *Roczniki Naukowe Ekonomii Rolnictwa i Rozwoju Obszarów Wiejskich*, 101(2), 91–101.
- Kumar, D. (2017). The Singh-Maddala distribution: properties and estimation. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, 8, 1297–1311. <https://doi.org/10.1007/s13198-017-0600-1>.
- Malekzadeh, A., & Kharrati-Kopaei, M. (2019). Inferences on the common mean of several heterogeneous log-normal distributions. *Journal of Applied Statistics*, 46(6), 1066–1083. <https://doi.org/10.1080/02664763.2018.1531980>.
- Moshrefi, A., Aghababa, H., & Shoaee, O. (2018). Statistical estimation of delay in nano-scale CMOS circuits using Burr Distribution. *Microelectronics Journal*, 79, 30–37. <https://doi.org/10.1016/j.mejo.2018.06.013>.
- Pareto, V. (1897). *Cours d'Économie Politique*. F. Rouge.
- Pocock, M. L., McDonald, J. B., & Pope, C. L. (2002). Estimating Faculty Salary Distributions: An Application of Order Statistics. *Journal of Income Distribution*, 11(3–4), 43–51. <https://doi.org/10.25071/1874-6322.1251>.
- Polisicchio, M. (2008). The continuous random variable with uniform point inequality measure $I(p)$. *Statistica & Applicazioni*, 6(2), 137–151. https://statisticaeapplicazioni.vitaepensiero.it/scheda-articolo_digital/marcella-polisicchio/the-continuous-random-variable-with-uniform-point-inequality-measure-999999_2008_0002_0040-151277.html.
- Shucksmith, M., Cameron, S., Merridew, T., & Pichler, F. (2009). Urban-rural differences in quality of life across the European Union. *Regional Studies*, 43(10), 1275–1289. <https://doi.org/10.1080/00343400802378750>.
- Singh, S. K., & Maddala, G. S. (1976). Function for Size Distribution of Income. *Econometrica*, 44(5), 963–970. <https://doi.org/10.2307/1911538>.
- Souma, W. (2001). Universal structure of the personal income distribution. *Fractals*, 9(4), 463–470. <https://doi.org/10.1142/S0218348X01000816>.
- Souma, W., & Nirei, M. (2005). Empirical Study and Model of Personal Income. In A. Chatterjee, S. Yarlagadda & B. K. Chakrabarti (Eds.), *Econophysics of Wealth Distributions* (pp. 34–42). Springer. https://doi.org/10.1007/88-470-0389-X_4.

- Thiede, B. C., Butler, J. L., Brown, D. L., & Jensen, L. (2020). Income inequality across the rural-urban continuum in the United States, 1970–2016. *Rural Sociology*, 85(4), 899–937. <https://doi.org/10.1111/ruso.12354>.
- Trzcińska, K. (2021). Kształtowanie się rozkładu dochodów ludności Polski dla regionów na podstawie wybranych modeli teoretycznych. *Acta Universitatis Lodziensis. Folia Oeconomica*, (1), 111–126. <https://doi.org/10.18778/0208-6018.352.06>.
- Trzcińska, K. (2022). An Analysis of Household Income in Poland and Slovakia Based on Selected Income Models. *Folia Oeconomica Stetinensia*, 22(1), 287–301. <https://sciendo.com/pl/article/10.2478/fofi-2022-0014>.
- Vielrose, E. (1960). *Rozkład dochodów według wielkości*. Polskie Wydawnictwo Gospodarcze.
- Zenga, M. (2010). Mixture of Poliscichio's Truncated Pareto Distributions with Beta Weights. *Statistica & Applicazioni*, 8(1), 3–25. https://www.vitaepensiero.it/scheda-articolo_digital/michele-zenga/mixture-of-poliscichios-truncated-pareto-distributions-with-beta-weights-999999_2010_0001_0002-151302.html.
- Zenga, M. M., Pasquazzi, L., & Zenga, M. (2012). First Applications of a New Three Parameter Distribution for Non-Negative Variables. *Statistica & Applicazioni*, 10(2), 131–147. https://statisticaeapplicazioni.vitaepensiero.it/scheda-articolo_digital/leo-pasquazzi-mariangela-zenga-michele-zenga/first-applications-of-a-new-three-parameter-distribution-for-non-negative-variables-999999_2012_0002_0037-151352.html.
- Zhong, S., Wang, M., Zhu, Y., Chen, Z., & Huang, X. (2022). Urban expansion and the urban–rural income gap: Empirical evidence from China. *Cities*, 129, 1–15. <https://doi.org/10.1016/j.cities.2022.103831>.

Maciej Miechowita – polski pionier państwowznawstwa

Czesław Domański^a, Alina Jędrzejczak^b, Jerzy T. Kowaleski^c

Streszczenie. Maciej z Miechowa, zwany Miechowitą, był polskim historykiem, geografem i lekarzem przełomu XV i XVI w. Celem artykułu jest przedstawienie dokonań Miechowity w zakresie państwowznawstwa, które wraz z arytmetyką polityczną doprowadziły do ukształtowania się statystyki jako samodzielnej dyscypliny naukowej. Autorzy prześledzili drogę życiową uczonego i omówili te jego dzieła, w których można odnaleźć elementy państwowznawstwa: *Chronica Polonorum (Kronika Polaków)*, a konkretnie rozdziały drugi i trzeci księgi pierwszej *Kroniki...*, oraz *Tractatus de duabus Sarmatiis Asiana et Europiana et de contentis in eis (Traktat o dwóch Sarmacjach, Azjatyckiej i Europejskiej, i o tym, co się w nich znajduje)*. Wskazali także na przejawy działalności charytatywnej Miechowity.

Słowa kluczowe: Maciej z Miechowa, Miechowita, państwowznawstwo, Sarmacja Azjatycka, Sarmacja Europejska

JEL: B16, N01

Maciej Miechowita – Polish pioneer of state studies

Abstract. Maciej of Miechów, also referred to as Miechowita, was a Polish historian, geographer and physician, living at the turn of the 15th and 16th centuries. The aim of the article is to present the achievements of Maciej of Miechów in the sphere of state studies, which, along with political arithmetic, led to the formation of statistics as an independent scientific discipline. The authors traced the life path of the scholar and described those of his works that included elements of state studies: the second and third chapter in Book One of *The Chronicle of the Poles* and *The Treatise on the Two Sarmatias of Asia and Europe*. The authors also point out the manifestations of Miechowita's charitable activities.

Keywords: Maciej of Miechów, Miechowita, state studies, Asian Sarmatia, European Sarmatia

1. Wprowadzenie

Analiza dokonań przedstawiciela dowolnej dyscypliny naukowej wiąże się z prześledzeniem jego życia, zwłaszcza w latach, które kształtowały poglądy, zainteresowania i aktywności badanej postaci. W odniesieniu do Macieja z Miechowa, zwanego

^a Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Instytut Statystyki i Demografii, Polska / University of Lodz, Faculty of Economics and Sociology, Institute of Statistics and Demography, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6144-6231>. Autor korespondencyjny / Corresponding author, e-mail: czeslaw.domanski@uni.lodz.pl.

^b Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Instytut Statystyki i Demografii, Katedra Metod Statystycznych, Polska / University of Lodz, Faculty of Economics and Sociology, Institute of Statistics and Demography, Department of Statistical Methods, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5478-9284>. E-mail: alina.jedrzejczak@uni.lodz.pl.

^c Komitet Nauk Demograficznych Polskiej Akademii Nauk / The Committee on Demographic Studies of the Polish Academy of Sciences. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2123-0203>. E-mail: jerzykowaleski@wp.pl.

Miechowitą¹, powiązanie drogi życiowej i wykształcenia z dokonaniami w różnych dziedzinach nauki akcentowali m.in. Barycz (1960, s. 13–64), Hajdukiewicz (1960a, s. 9–50, Hajdukiewicz, 1960c) oraz Małuszyński i Olszewicz (1967, s. 25 i nast.)². Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie dokonań Miechowity w zakresie państwowznawstwa, które wraz z arytmetyką polityczną doprowadziły do ukształtowania się statystyki jako samodzielnej dyscypliny naukowej. Państwowznawstwo należy tu rozumieć jako przedstawianie stanu państwa lub regionu nie tylko za pomocą liczb, lecz także przez pryzmat innych cech i charakterystyk, np. geograficznych, etnicznych i gospodarczych (Ostasiewicz, 2012, s. 33 i nast.).

2. Droga życiowa i osiągnięcia

Data urodzenia Macieja Miechowity budzi wątpliwości. W epitafium napisanym przez Mikołaja z Wieliczki – serwisora (służącego), ucznia i młodszego kolegę Miechowity w Katedrze Medycyny Akademii Krakowskiej, a wreszcie beneficjenta stypendium na studia medyczne (doktorskie) we Włoszech ufundowanego przez Miechowitę – podane są data śmierci: 8 września 1523 r. i wiek: 66 lat. Z tego wynika, że Miechowita urodził się w 1457 r. Niektórzy badacze wskazują datę o kilka lat wcześniejszą, powołując się na zapiski w księgach parafialnych w Miechowie (Małuszyński i Olszewicz, 1967, s. 25), ale większość opowiada się za uznaniem za właściwy roku urodzenia wydedukowanego z epitafium (Barycz, 1960, s. 467). Miechowita rozpoczął naukę w szkole parafialnej w Miechowie prowadzonej przez zakon bożogrobców. Uczył się również w jednej ze szkół parafialnych w Krakowie, prawdopodobnie w szkole przykatedralnej na Wawelu, przygotowującej kandydatów na studia w Akademii Krakowskiej (Krakowiecka, 1956, s. 59–60).

W źródłach, w których w różnych kontekstach pojawia się nazwisko Miechowity (Krakowiecka, 1956, s. 42–44), brakuje wielu informacji o jego dzieciństwie i młodości, np. dotyczących finansowania jego pobytu i kształcenia w przykatedralnej szkole w Krakowie, a następnie w Akademii Krakowskiej, czy fundatora stypendium, dzięki któremu miał możliwość odbycia studiów medycznych w Italii. Prawdopodobnie podczas studiów był serwisorem jednego z zamożniejszych profesorów – mieszkał z nim i prowadził jego gospodarstwo domowe. Był to wówczas dość powszechny

¹ Jego właściwe nazwisko (lub przydomek), przyjęte od ojca Stanisława, który był rolnikiem w Miechowie, brzmi Karpiga. W dorosłym życiu Miechowita się nim nie posługiwał. Nie zostało wymienione nawet w jego epitafium.

² Warto nadmienić, że Henryk Barycz był historykiem nauki i kultury oraz archiwistą, autorem prac dotyczących okresu odrodzenia w Polsce, w tym życiorysu Miechowity. Leszek Hajdukiewicz, również historyk i archiwista, był uczniem Barycza; swoją rozprawę habilitacyjną poświęcił księgozbiorowi Miechowity. Bolesław Olszewicz, geograf i bibliotekarz, był redaktorem pracy poświęconej historii badań geograficznych w Polsce i wybitnym polskim geografom, w której zamieścił, napisany razem z Marianem Małuszewiczem, historykiem i kartografem, rozdział poświęcony Miechowie.

sposób na znalezienie kwatery i zdobycie środków na utrzymanie (Małuszyński i Olszewicz, 1967, s. 26). Możliwe też, że udzielał korepetycji młodszym od siebie członkom rodziny Turzonów, bogatych krakowskich mieszczan (patrycjuszy), w których kamienicy zajmował mieszkanie właściwie do końca życia.

Miechowita immatrykulował się na Wydziale Sztuk Wyzwolonych Akademii Krakowskiej po semestrze zimowym w roku akademickim 1473/1474, opłaciwszy wpisowe gotówką w wysokości 6 gr lub 8 gr (Barycz, 1960, s. 18; Krakowiecka, 1956, s. 60; Małuszyński i Olszewicz, 1967, s. 25). Studia pierwszego stopnia ukończył w 1476 r., uzyskując tytuł bakałarza. Po kolejnych trzech latach nauki – obejmującej astronomię, astrologię, filozofię i nauki medyczne – uzyskał tytuł magistra sztuk wyzwolonych. Uplasował się na drugim miejscu wśród 15 magistrów promowanych w 1479 r. na fakultecie filozoficznym i medycznym (Hajdukiewicz, 1960b, s. 270; Krakowiecka, 1956, s. 61)³.

Przez krótki czas po ukończeniu Akademii Krakowskiej Miechowita był profesorem, a następnie (w 1482 r.) został rektorem przykatedralnej (zamkowej) szkoły w Krakowie, mającej wówczas status szkoły średniej. W 1483 r., dzięki zebranim środkom na pogłębienie studiów medycznych, wyjechał na Półwysep Apeniński, gdzie po trzech lub czterech latach uzyskał tytuł doktora nauk medycznych (Hajdukiewicz, 1960b, s. 270). Wśród badaczy nie ma zgodności co do długości ani nawet miejsca (Bolonia lub Padwa) jego pobytu w czasie studiów (Barycz, 1960, s. 28; Hajdukiewicz, 1960b, s. 272; Krakowiecka, 1956, s. 64).

W 1488 r. Miechowita nostryfikował doktorat w Akademii Krakowskiej. Procedura trwała około roku, co może dziwić, ponieważ poziom nauk medycznych na uczelniach Bolonii i Padwy był wyższy niż w Polsce, a do diagnozy chorób i przyczyn zgonów wykorzystywano już sekcję zwłok. Miechowita nigdy takiej praktyki nie podejmował, a jako lekarz czerpał raczej z astrologii niż patoanatomii. „Można by zaryzykować twierdzenie, że studia astronomiczno-astrologiczne w Krakowie i być może we Włoszech nie wyszły naszemu Miechowicie na korzyść. Nauczyły go patrzeć w gwiazdy zamiast w ciało chorego człowieka” – stwierdza jeden z historyków medycyny (Bilikiewicz, 1960, s. 198). Niemniej Maciej z Miechowa był cenionym lekarzem (Konarska-Zimnicka, 2024, s. 42). We wszystkim, co opisywał (nie tylko jako lekarz), posiłkował się zarówno praktyką i obserwacją, jak i wywiadem. Niektórzy badacze (np. Konarska-Zimnicka, 2024) zauważają, że był także jatromatematykiem, ponieważ stosował arytmetykę i geometrię w astrologii i wykorzystywał tę wiedzę i umiejętności w praktyce medycznej.

³ Rok po ukończeniu studiów medycznych Miechowita uczestniczył w pogrzebie Jana Długosza, stąd przypuszczenie, że znał kronikarza i mógł się z nim zetknąć np. podczas nauki w Akademii Krakowskiej.

Po powrocie ze studiów Miechowita jeszcze co najmniej dwukrotnie wyjeżdżał za granicę. W 1500 r. pielgrzymował do Rzymu z okazji Roku Świętego. Wracając przez Dalmację i dzisiejszą Słowenię, przeprowadzał wywiady z mieszkańcami i poszerzał swoją wiedzę na temat południowych Słowian. Druga podróż, słabo udokumentowana, wiodła do Budy (obecnie Budapeszt) w celu skonsultowania pacjenta z rodziny królewskiej lub samego króla Władysława. Działo się to w 1504 r., kiedy wieści o umiejętnościach medycznych Miechowity dotarły już na polski dwór królewski.

W 1500 r., po nostryfikacji doktoratu w zdobyciu doświadczenia w praktyce lekarskiej, Miechowita związał się na stałe z Akademią Krakowską i tamtejszą Katedrą Medycyny, którą kierował do końca życia. Utrzymywał przyjazne kontakty z krakowskimi patrycjuszami, m.in. Janem Bonerem, Mikołajem Jaskierem oraz Janem Turzą i jego rodziną. Pod koniec życia został członkiem rady miasta. W wieku 52 lat przyjął święcenia kapłańskie, niezbędne do objęcia funkcji kanonika kapituły katedralnej, którą pełnił do końca życia. Praca na uczelni, praktyka lekarska i benefity wynikające z bycia kanonikiem sprawiły, że pod koniec życia stał się zamożnym duchownym-mieszczaninem.

Głównymi nurtami działalności Miechowity w dojrzałym okresie jego życia (1500–1523) były:

- praca dydaktyczna i organizacyjna na uczelni;
- praca naukowo-badawcza i wydawnicza w zakresie medycyny, historii i geografii (ten nurt obejmuje prekursorskie badania w zakresie państwowznawstwa);
- intensywna praktyka lekarska i astrologiczna;
- działalność filantropijna.

Chociaż nie ma to związku z zainteresowaniami państwowznawczymi Miechowity, chcemy zwrócić uwagę na ten ostatni punkt. Znaczną część swoich zarobków, uzyskiwanych przede wszystkim z praktyki lekarskiej, Miechowita przeznaczał na cele charytatywne. Koledzy z uczelni, np. Mikołaj z Szadka, nazywali go *wielkim, niezrównanym jałmużnikiem* (Miechowita, 2023, s. 14). Niezamożnym mieszkańcom Krakowa Miechowita udzielał bezpłatnych porad i ofiarowywał lekarstwa sporządzone według własnej receptury, wspierał niezamożnych studentów i bursy studenckie, ufundował szkoły parafialne w Krakowie i Miechowie, wspierał kościoły i klasztory (m.in. ufundował bibliotekę w klasztorze Paulinów na Skałce). Udzielał pomocy niezamożnym rodzinom, a nawet fundował posagi ubogim pannom. Jego staraniem powstał szpital dla studentów. Na mocy testamentu wszystkie dobra rozdzielił między kościoły, klasztory, fundacje, osoby niezamożne, a także kolegów z uczelni i kapituły (Małuszyński i Olszewicz, 1967, s. 31) i rozdał większość swojej imponującej jak na tamte czasy – liczącej ponad tysiąc dzieł z różnych dziedzin – biblioteki. Ostatnią wolą Miechowity było, aby egzemplarze ksiąg nieprzekazanych konkretnym osobom i wyposażenie jego mieszkania zostały sprzedane, a pieniądze przekazane kościołom jako ofiara na

modlitwę i msze święte w jego intencji. Na egzekutora testamentu został wyznaczony Mikołaj z Wieliczki.

3. Elementy państwowznawstwa w spuściźnie Miechowity

Dorobek pisarski Macieja z Miechowa w zakresie państwowznawstwa nie jest bogaty, ale stanowi cenny materiał do analiz. Świadczenia zainteresowania Miechowity stanem państwa, pozostającego w ścisłym związku z jego zainteresowaniami historycznymi i geograficznymi, można znaleźć w początkowych rozdziałach dzieła *Chronica Polonorum* (*Kronika Polaków*), wydanego w 1519 r., i w nieco wcześniejszym, wydanym w 1517 r., dziele *Tractatus de duabus Sarmatiis Asiana et Europiana et de contentis in eis* (*Traktat o dwóch Sarmacjach, Azjatyckiej i Europejskiej, i o tym, co się w nich znajduje*).

3.1. *Kronika Polaków*

*Chronica Polonorum*⁴ jest uznawana za najważniejsze dzieło Miechowity. Składa się z czterech ksiąg, przedstawiających dzieje Polski od jej mitycznych początków do 1506 r., a więc do czasów Zygmunta Starego. Po ukazaniu się *Kroniki...* drukiem część jej nakładu została skonfiskowana przez dwór królewski. Powodem był krytyczny stosunek autora do niektórych działań Jana Olbrachta i Aleksandra Jagiellończyka – poprzedników Zygmunta Starego na polskim tronie – oraz niepochlebna opinia o ostatniej żonie Władysława Jagiełły, o której dużo wcześniej Długosz napisał, że była „więcej urodą niż cnotami zalecona” (Krakowiecka, 1956, s. 212). Miechowita odmówił wniesienia poprawek do *Kroniki...*, czym dał dowód stanowczości i wierności swoim poglądom i przekonaniom. Dwa lata po pierwszym wydaniu, w 1521 r., ukazało się jednak wydanie tego dzieła pozbawione krytycznych uwag wobec dynastii Jagiellonów. Usunął je albo wydawca Hieronim Wietor, albo mieszkający w Krakowie Alzatczyk Justus Ludwik Decjusz, historyk, sekretarz królewski i przyjaciel Miechowity.

W opisie państwa zamieszczonym we wprowadzeniu do *Kroniki...* przeważają charakterystyki geograficzne, przede wszystkim orograficzne i hydrograficzne. W księdze pierwszej, liczącej 19 rozdziałów, autor opisał legendarną część dziejów Słowian, głównie plemion polskich. W pierwszych trzech rozdziałach omówił położenie ziem, na których osiadły te plemiona, po tym jak przemieściły się wraz z innymi Słowianami z basenu Morza Śródziemnego – ich protoplastą miał być Jawan, potomek Noego. Tę legendę Miechowita przejął wprost od Długosza. Utrudniała ona ściśle określenie położenia ziem polskich, tak jak ukształtowały się one w czasach historycznych. Według przekonań Miechowity Słowianie przybyli z południa i rozproszyli się po całej

⁴ Do niedawna w języku polskim dostępne były tylko fragmenty tego dzieła w tłumaczeniu Stanisława Chwałczewskiego z 1549 r. Pełnego przekładu dokonał w 2023 r. ks. Michał K. Cichoń.

Europie Wschodniej i Środkowej – od rzeki Don (w starożytności nazywanej Tanais) na wschodzie do granic cesarstwa Karola Wielkiego, czyli po Lubekę i Rostock, na zachodzie. Jedynymi liczbami, które podał Miechowita (pojawily się one w rozdziale drugim), były współrzędne geograficzne użyte do oznaczenia źródeł i ujść głównych rzek, położenia miast, pasm i szczytów górskich oraz tzw. stref (pasów) klimatycznych układających się równoleżnikowo (pojęcie przyjęte od Klaudiusza Ptolemeusza).

Położenie Polski określił Miechowita (2023) następująco: „Polska zatem w naszych czasach od zachodu [graniczy] ze Śląskiem i Marchią Brandenburską, od północy natomiast z Morzem Bałtyckim, Inflantami i Wielkim Księstwem Moskiewskim, Litwa bowiem stała się częścią Polski” (s. 44). Dalej wymienił nazwy siedmiu słynnych polskich rzek: Dniepr (starożytny Borystenes), Bug⁵, Dniestr (starożytny Tyras), Wisła, Warta, Odra i Niemen.

W rozdziale trzecim opisał warunki klimatyczne panujące na ziemiach polskich na północ od Gór Karpackich, które określił mianem Sarmackich. Podał obszerne informacje na temat flory i fauny udomowionej i dzikiej na obszarze od Karpat do Bałtyku, wymienił rodzaje upraw, hodowli, a także wymiany handlowej. Wskazał miejsca wydobywania lub pozyskiwania minerałów, w tym kruszców szlachetnych, i kopalnych naczyń ceramicznych podobnych do tych wykonywanych przez rzemieślników. Tę ostatnią informację Maciej z Miechowa przejął od Długosza, który jako pierwszy pisał o glinianych naczyniach wydobywanych z ziemi m.in. obok Śremu w Wielkopolsce, gdzie prace górnicze (czytaj: wykopaliskowe) prowadzono na starym cmentarzysku, istniejącym co najmniej 1000 lat przed Długoszem. W podobny sposób utrwaliła się legenda o ściętych drzewach (sosnach i świerkach) zmieniających się po kilku latach w krzemień (Miechowita, 2023, s. 47).

Zainteresowanie Miechowity liczbą i wielkością miast na ziemiach polskich było umiarkowane. Autor wymienił Kraków, Lwów, Wilno i Gdańsk oraz podał ich współrzędne geograficzne, ale nie oszacował liczby ich mieszkańców. Co prawda przywołał również nazwy innych miejscowości, ale nie traktował ich jako jednostek tworzących sieć osadniczą, a jedynie wiązał je z opisywanymi przez siebie wydarzeniami i w ten sposób umiejscawiał je w przestrzeni.

3.2. Traktat o dwóch Sarmacjach, Azjatyckiej i Europejskiej, i o tym, co się w nich znajduje

Znacznie więcej charakterystyk opisywanych terenów Miechowita zamieścił w *Tractatus de duabus Sarmatiis Asiana et Europiana et de contentis in eis*⁶. Jego przygotowanie

⁵ Miechowita podaje, że ta rzeka uchodzi do Morza Czarnego, więc zapewne ma na myśli Boh.

⁶ Pierwszym tłumaczem tego dzieła na język polski był w 1535 r. Andrzej Glaber z Kobyłina. Współczesny przekład Tadeusza Bieńkowskiego pt. *Opis Sarmacji Azjatyckiej i Europejskiej oraz tego, co się w nich znajduje*

i druk były związane z planowanym na 1517 r. ślubem Zygmunta Starego i Bony. Zamierzano obdarować nim uczestniczących w uroczystości dostojników europejskich dworów. W XVI w. traktat miał kilkanaście wydań, wypisów i tłumaczeń na kilka języków, co świadczy o tym, że dla ówczesnych przedstawicieli nauki był on cennym źródłem wiedzy o obszarach północno-wschodniej Europy graniczących z Azją i ich mieszkańcach.

Miechowita opierał swoją pracę nad *Traktatem*... nie tylko na zbadaniu, co w interesującym go przedmiocie zostało już napisane, lecz także na autopsji i wywiadach z jeńcami, którzy dostali się do niewoli króla polskiego po bitwie pod Orszą w 1514 r. podczas wojny litewsko-polsko-moskiewskiej. *Traktat*... przedstawia ziemie i ludy Sarmacji Azjatyckiej, nazywanej też Scytią lub Tartarią (albo Tatarią), oraz Sarmacji Europejskiej. W ich opisie autor podjął cztery wątki: geograficzny, etniczny, historyczny i ekonomiczny. Zawierały one – z wyjątkiem wątku etnicznego – elementy państwowznawstwa.

Sarmacja Europejska, według Miechowity, rozciągała się równoleżnikowo od rzeki Don na wschodzie do Wisły na zachodzie. Do tej krainy należały zatem następujące ziemie: wschodnia część państwa polskiego (Korony), Ruś Kijowska (podporządkowana w XVI w. Polsce i Wielkiemu Księstwu Litewskiemu), samo Wielkie Księstwo Litewskie, Wielkie Księstwo Moskiewskie, tereny księstw leżących na wschód od Moskwy, a także – na północy – niesłowiańskie terytoria Żmudzinów, Karelów i Jugrów (Ugrów) aż do jezior Ładoga i Onega. Miechowita albo zaliczał wymienione terytoria do Sarmacji Europejskiej, albo nie wypowiedział się na ten temat jednoznacznie. Nie wspominał też o terytoriach Komi i górach Ural, gdzie przebiega geograficzna granica między Europą a Azją.

W części geograficznej Miechowita rozprawił się z przekazem starożytnych Greków, zwłaszcza Ptolemeusza, o pasmach gór w północno-wschodniej Europie, stanowiących dział wodny, w których źródła mają rzeki Sarmacji płynące na północ i południe (Dźwina, Wołga, Dniepr, Don i Boh). Wszystkie te rzeki w rzeczywistości wypływają z terenów podmokłych i niskich, a wspomnianie o górach na tym obszarze (np. Hiperborejskich lub Ryfejskich) Miechowita potraktował jako fikcję. Podobnie ustosunkował się do łagodnego klimatu panującego na północy Europy, aż po Ocean Północny (zapewne Morze Białe), czy występujących tam kopalni łatwo dostępnych minerałów chronionych przez gryfy i jednoookich cyklopów. Nie poprzestał na wyliczaniu błędów greckich pisarzy i historyków; opisał – na podstawie przekazów jeńców moskiewskich – florę i faunę terenów, z których pochodzili jego rozmówcy. Podał też przybliżone

– opatrzony wstępem Henryka Barycza, komentarzem tłumacza i posłowiem Waldemara Voiségo – ukazał się w 1972 r.

odległości (w milach pruskich lub wiorstach) między głównymi miastami leżącymi na tych terenach. Trzeba przy tym odnotować, że sam popełnił poważny błąd. Wiedząc o istnieniu Morza Kaspijskiego, kilkakrotnie stwierdził, że Wołga ma ujście do Morza Czarnego w pobliżu Błot Meotydy (czyli Morza Azowskiego).

W części ekonomicznej omówił przejawy życia gospodarczego, dotyczące zwłaszcza Sarmacji Europejskiej, ale bez wdawania się w szacunki liczbowe. Wskazał, że ludy zamieszkujące Sarmację zajmowały się rolnictwem, rzemiosłem i handlem własnymi wyrobami, a także korzystały z dóbr uzyskanych z eksploatacji przyrody (drewna, skór i mięsa dzikich zwierząt, miodu itd.). Oceniał, że w czasach mu współczesnych, czyli w końcu XV w., obszary Sarmacji – szczególnie Azjatyckiej, a także wschodniej części Sarmacji Europejskiej – były słabo zurbanizowane. W miastach, nawet największych, przeważała zabudowa drewniana. Murowane były jedynie twierdze i zamki (np. Kreml w Moskwie), a także niektóre świątynie. Według Miechowity miasta Sarmacji miały większą powierzchnię niż te na zachodzie Europy. Dla przykładu Moskwa była dwa razy większa od Florencji czy Pragi. Autor tłumaczył to tym, że domy w Moskwie nie łączyły się ze sobą, tylko stały w ogrodach oddzielonych płotami lub parkanami (co w pewnym stopniu chroniło przed częstymi w tamtych czasach pożarami).

Na temat etniczno-demograficznych struktur Sarmacji Miechowita pisał, że poprzednikami Tatarów, czyli wcześniejszymi mieszkańcami Sarmacji Azjatyckiej, byli Hunowie i Scytowie. Do Hunów (niesłusznie) zaliczył plemiona ugryjskie, a wśród nich wymienił Węgrów, którzy w IX w. najechali Europę Wschodnią w kierunku Bałkanów i Panonii, gdzie przyjęli chrześcijaństwo i zorganizowali własne państwo. Z badań nad średniowiecznymi migracjami na obszarze na wschód od Donu wynika, że Miechowita mylił się co do kierunku, z którego Węgrzy przybyli na Nizinę Panońską, bo migrowali nie wzdłuż mórz Kaspijskiego i Czarnego, lecz z północnego wschodu.

Miechowita stwierdzał, że Tatarzy – którzy od wschodu wypierali z Sarmacji Azjatyckiej najpierw Hunów, a potem Scytów – największych podbojów dokonali w pierwszej połowie XIII w. Wskazał ich stałe siedziby (np. Nowy Saraj i Kazań), skąd wielokrotnie zapuszczali się w kierunku Europy Wschodniej i Środkowej. Opisał najazdy na Księstwo Moskiewskie i podporządkowanie go sobie na ponad 200 lat, oraz na takie miasta, jak Wilno, Kraków, Legnica, Buda i Peszt. Wspominał o czterech ordach (hordach) tatarskich: zawołańskiej, perekopskiej, kazańskiej i nogajskiej. Nie podał liczebności ord ani liczby mieszkańców Tartarii. Wymieniał natomiast liczby osób branych w niewolę podczas większych wypraw tatarskich – prawie zawsze były to dziesiątki tysięcy kobiet, mężczyzn i dzieci.

Warto podkreślić, że autor *Traktatu...* miał świadomość wzrostu znaczenia Wielkiego Księstwa Moskiewskiego, powiększającego się w wyniku inkorporacji sąsiednich

terytoriów, m.in. księstw: Włodzimierskiego, Twerskiego, Jarosławskiego, Suzdańskiego i Riazańskiego. W odniesieniu do każdej z tych ziem przytaczał dane przydatne do oszacowania liczby mieszkańców, a konkretnie liczebność wojska możliwego do wystawienia na wypadek wojny, np. Moskwa – 30 tys. zbrojnej szlachty i 60 tys. chłopów, Twer – 40 tys. zbrojnej szlachty i 60 tys. chłopów. Podał także wielkość poszczególnych ziem lub księstw (w milach pruskich). W jego ocenie od końca XV w. Wielkie Księstwo Moskiewskie było największym państwem Sarmacji Europejskiej, politycznie konkurującym z Wielkim Księstwem Litewskim.

W *Traktacie...* można znaleźć także informacje o religiach, wyznaniach i strukturach organizacji wyznaniowych w Sarmacjach (Maciej z Miechowa, 1972, s. 63).

Reasumując, można za Baryczem stwierdzić, że elementy państwowstwa w *Kronice...* nie sprowadzały się do opisu położenia, ukształtowania terenu, fizjografii, klimatu, stosunków etnicznych i zdarzeń historycznych. Obejmowały również „stosunki militarne, administracyjne, urządzenia kultury materialnej, wreszcie ekonomikę tych nieznanymi regionów” (Barycz, 1960, s. 62). Warto przytoczyć również opinię Dziuby (2000): „Był to wielki wkład Polski w rozwój nauki o ziemi. Świadomym tego był sam autor, choć w swej skromności osobistej, możliwość ujawnienia i ustalenia nowej prawdy o obszarach krajów północnych i wschodnich przypisywał szczęśliwemu przypadkowi prowadzonej aktualnie wojny z Moskwą” (s. 66).

4. Podsumowanie

Macieja Miechowitę, ze względu na jego wszechstronne zainteresowania i rozległą wiedzę, zarówno medyczną i astrologiczną, jak i geograficzną oraz historyczną, można nazwać prawdziwym człowiekiem renesansu. Uczony wniósł również pionierski wkład w dziedzinę państwowstwa. Zarówno w *Kronice Polaków*, którą traktował jako kompendium wiedzy o dziejach ojczyźnych, jak i w rozważaniach dotyczących Europy Wschodniej na przełomie XV i XVI w. zawartych w *Traktacie o dwóch Sarmacjach, Azjatyckiej i Europejskiej, i o tym, co się w nich znajduje*, zajmował się zagadnieniami dotyczącymi stanu państwa, które – wraz z arytmetyką polityczną – stanowiły punkt wyjścia do ukształtowania się statystyki jako samodzielnej dyscypliny naukowej.

Bibliografia

Barycz, H. (1960). *Życie i twórczość Macieja z Miechowa*. W: H. Barycz (red.), *Maciej z Miechowa 1457–1523. Historyk, geograf, lekarz, organizator nauki* (s. 15–64). Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk.

- Bilikiewicz, T. (1960). Maciej Miechowita na tle medycyny Odrodzenia. W: H. Barycz (red.), *Maciej z Miechowa 1457–1523. Historyk, geograf, lekarz, organizator nauki* (s. 167–204). Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk.
- Buczek, K. (1960). Maciej Miechowita jako geograf Europy Wschodniej. W: H. Barycz (red.), *Maciej z Miechowa 1457–1523. Historyk, geograf, lekarz, organizator nauki* (s. 75–166). Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk.
- Dziuba, A. (2000). *Wczesnorennesansowa historiografia polsko-lacińska*. Wydawnictwo KUL.
- Hajdukiewicz, L. (1960a). *Biblioteka Macieja z Miechowa*. Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk.
- Hajdukiewicz, L. (1960b). Przyczynki do życia i twórczości Macieja z Miechowa. W: H. Barycz (red.), *Maciej z Miechowa 1457–1523. Historyk, geograf, lekarz, organizator nauki* (s. 255–304). Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk.
- Hajdukiewicz, L. (1960c). Zainteresowania naukowe Macieja z Miechowa w świetle jego księgozbioru. W: H. Barycz (red.), *Maciej z Miechowa 1457–1523. Historyk, geograf, lekarz, organizator nauki* (s. 205–254). Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk.
- Konarska-Zimnicka, S. (2024). Maciej z Miechowa. Astrolog, medyk, a może jatromatematyk?. *Medycyna Nowożytna*, 30(1), 35–68. <https://doi.org/10.4467/12311960MN.24.002.19690>.
- Krakowiecka, L. (1956). *Maciej z Miechowa, lekarz i uczony Odrodzenia*. Państwowy Zakład Wydawnictw Lekarskich.
- Królikowski, J. (2023). Wielki miłośnik swej ojczyzny. Maciej z Miechowa (1457–1523). W: Maciej z Miechowa, *Kronika Polaków* (tłum. M. K. Cichoń, s. 7–24). Biały Kruk.
- Kuczyński, S. M. (1965a). Miechowita jako historyk. *Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej. Seria A*, (7), 3–43.
- Kuczyński, S. M. (1965b). O Macieju z Miechowa. *Kwartalnik Historii Nauki i Techniki*, 10(1–2), 43–67. https://bazhum.muzhp.pl/media/texts/kwartalnik-historii-nauki-i-techniki/1965-tom-10-numer-1-2/kwartalnik_historii_nauki_i_tehniki-r1965-t10-n1_2-s43-67.pdf.
- Kuklo, C. (2017). Polska myśl i praktyka statystyczna do końca XVIII wieku. W: F. Kubiczek (red.), *Historia Polski w liczbach. Statystyka Polski. Dawniej i dziś* (s. 19–66). Główny Urząd Statystyczny. https://stat.gov.pl/files/gfx/portalinformacyjny/pl/defaultaktualnosci/5501/34/1/1/historia_polski_w_liczbach_tom_czwarty_statystyka_polski.pdf.
- Maciej z Miechowa. (1508). *Excellentissimi viri Mathie de Miechorv Contra saevam pestem regimen accuratissimum*. Collectum et ipressum Cracouie Jan Haller.
- Maciej z Miechowa. (1517). *Tractatus de duabus Sarmatiis Asiana et Europiana et de contentis in eis*. S. Grimm, M. Wirsung.
- Maciej z Miechowa. (1522). *Conservatio sanitatis*. Wietor, Hieronim.
- Maciej z Miechowa. (1972). *Opis Sarmacji Azjatyckiej i Europejskiej* (tłum. T. Bieńkowski). Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk.
- Małuszyński, M., Olszewicz, B. (1967). Maciej z Miechowa. W: B. Olszewicz. (red.), *Dziewięć wieków geografii polskiej. Wybitni geografowie polscy* (s. 25–63). Wiedza Powszechna.
- Miechowita, M. (2023). *Kronika Polaków* (tłum. M. K. Cichoń). Biały Kruk.
- Mrożkiewicz, J. (red.). (2015). *Maciej z Miechowa. Zapiski kronikarskie 1481–1506* (tłum. P. Baran, M. M. Broneberg). Wydawnictwo Czuwajmy.

Ostasiewicz, W. (2012). Rozwój myśli statystycznej w Polsce w XIX wieku. *Przegląd Statystyczny*, 59(1s), 33–46. <https://doi.org/10.59139/ps.2012.SI1.1>.

Stopka, K. (2013). Maciej Miechowita. Życie polskiego uczonego w czasach Jagiellońskich. W: K. Olchawa (red.), *Maciej z Miechowa (1457–1523)*. Towarzystwo Przyjaciół Sztuki w Miechowie, Biuro Wystaw Artystycznych „u Jaksy”.

WYDAWNICTWA GUS. SIERPIEŃ 2025 PUBLICATIONS OF STATISTICS POLAND. AUGUST 2025

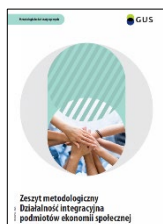
W ofercie wydawniczej Głównego Urzędu Statystycznego z ubiegłego miesiąca warto zwrócić uwagę na następujące publikacje:

Among Statistics Poland's publications from the previous month, we would like to recommend:

Zeszyt metodologiczny. Działalność integracyjna podmiotów ekonomii społecznej

Methodological report. Integration activities of social economy entities

Uaktualniona wersja zeszytu z 2020 r., w którym przedstawiono założenia metodologiczno-organizacyjne *Badania działalności integracyjnej podmiotów ekonomii społecznej*.



Język: polski (metadane również w języku angielskim)

Language: Polish (metadata available also in English)

Seria: Metodologia badań statystycznych

Series: Statistical research methodology

Dostępne wersje: elektroniczna

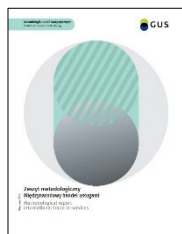
Available in: electronic form

Badanie, realizowane co dwa lata (pierwszy raz w 2021 r.), dostarcza informacji na temat podmiotów ekonomii społecznej, takich jak: organizacje pozarządowe, spółki non profit, spółdzielnie socjalne, spółdzielnie pracy czy warsztaty terapii zajęciowej, i ich działalności. Na podstawie zgromadzonych danych przeprowadzane są analizy dotyczące integracyjnej funkcji wymienionych podmiotów oraz opracowywane kluczowe wskaźniki na potrzeby planowania i monitorowania polityki w dziedzinie ekonomii społecznej na szczeblu rządowym i samorządowym.

Opracowanie składa się z siedmiu rozdziałów, które dotyczą: zakresu podmiotowego i przedmiotowego oraz metody badania, narzędzi zbierania danych, zmiennych występujących w badaniu, definicji najważniejszych pojęć, organizacji badania oraz prezentacji jego wyników i oceny jego jakości. Do publikacji dołączono 10 załączników: kartę badania, formularze sprawozdań za 2023 r., listę zmiennych oraz raporty jakości badania z 2021 r.

Zeszyt metodologiczny. Międzynarodowy handel usługami **Methodological report. International trade in services**

Publikacja przedstawiająca zasady metodologiczno-organizacyjne badania *Międzynarodowy handel usługami* (MHU), prowadzonego od 2009 r. przez Główny Urząd Statystyczny we współpracy z Narodowym Bankiem Polskim.



Język: polski (metadane, spis treści, ważniejsze skróty i wstęp również w języku angielskim)

Language: Polish (metadata, contents, major abbreviations and introduction available also in English)

Seria: Metodologia badań statystycznych

Series: Statistical research methodology

Dostępne wersje: elektroniczna

Available in: electronic form

Badanie MHU obejmuje obligatoryjnie wszystkie podmioty gospodarki narodowej dostarczające usług lub nabywające je w handlu międzynarodowym. Jego częstotliwość – kwartalna i roczna – pozwala na ciągłą obserwację obrotów w międzynarodowej wymianie usług. Zebrane informacje, uwzględniające rodzaj świadczonych usług i kraj kontrahenta lub organizacji międzynarodowej, są wykorzystywane do tworzenia bilansu płatniczego Rzeczypospolitej Polskiej (w ramach rachunku bieżącego w zakresie danych o usługach) i w statystyce rachunków narodowych (w rachunku podaży i wykorzystania wyrobów i usług oraz w sektorze zagranica).

Opracowanie składa się z ośmiu rozdziałów. Przybliżono w nich m.in. tło historyczne i zmiany wprowadzane w badaniu, zakres podmiotowy i przedmiotowy badania, a także przedstawiono jego charakterystykę w zakresie uzyskiwania danych, opracowywania i publikowania wyników oraz oceny jakości badania. Opis metodologii badania, jak również załączniki do zeszytu (formularze sprawozdań i opis kodów usług) dotyczą edycji z 2023 r.

W sierpniu br. ukazały się ponadto:

- „Biuletyn statystyczny” nr 7/2025;
- *Ceny robót budowlano-montażowych i obiektów budowlanych (czerwiec 2025 r.)*;
- *Koniunktura gospodarcza (2000–2025) – sierpień 2025*;
- *Koniunktura gospodarcza. Raport wojewódzki lipiec 2025* nr 7/2025;
- *Produkcja ważniejszych wyrobów przemysłowych w lipcu 2025 r.*;
- „Przegląd Statystyczny. Statistical Review” nr 4/2024;
- *Regiony Polski 2025*;

- *Sytuacja społeczno-gospodarcza kraju w lipcu 2025 r.;*
- *Współpraca podmiotów ekonomii społecznej w 2023 r.*

Joanna Sadowy

Główny Urząd Statystyczny, Departament Opracowań Statystycznych, Polska
Statistics Poland, Statistical Products Department, Poland

Wszystkie publikacje GUS w wersji elektronicznej są dostępne na stronie stat.gov.pl/publikacje/publikacje-a-z.
Wersje drukowane (jeśli zostały wydane) można zamawiać pod adresem: zws-sprzedaz@stat.gov.pl.
All the publications of Statistics Poland available in electronic form can be accessed at stat.gov.pl/en/publications. Printed versions (if available) may be ordered at: zws-sprzedaz@stat.gov.pl.

DLA AUTORÓW FOR THE AUTHORS

(for the English translation of the information given below, please visit ws.stat.gov.pl/ForAuthors)

W „Wiadomościach Statystycznych. The Polish Statistician” („WS”) zamieszczane są artykuły o charakterze naukowym poświęcone teorii i praktyce statystycznej, które prezentują wyniki oryginalnych badań teoretycznych lub analitycznych wykorzystujących metody statystyki matematycznej, opisowej bądź ekonometrii. Ukazują się również artykuły przeglądowe, recenzje publikacji naukowych oraz inne opracowania informacyjne. W czasopiśmie publikowane są prace w języku polskim i angielskim.

Od 2007 r. „WS” znajdują się na liście czasopism naukowych Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego. Zgodnie z komunikatem Ministra Nauki z dnia 5 stycznia 2024 r. w sprawie wykazu czasopism naukowych i recenzowanych materiałów z konferencji międzynarodowych „WS” otrzymały 70 punktów.

„Wiadomości Statystyczne. The Polish Statistician” są udostępniane w następujących bazach, repozytoriach, katalogach i wyszukiwarkach: Agro, BazEkon, Biblioteka Nauki, Central and Eastern European Academic Source (CEEAS), Central and Eastern European Online Library (CEEOL), Central European Journal of Social Sciences and Humanities (CEJSH), Directory of Open Access Journals (DOAJ), EBSCO Discovery Service, European Reference Index for the Humanities and Social Sciences (ERIH Plus), Exlibris Primo, Google Scholar, ICI Journals Master List, ICI World of Journals, Norwegian Register for Scientific Journals and Publishers (The Nordic List), Summon i WorldCat.

Za publikację artykułów na łamach „WS” autorzy nie otrzymują honorariów ani nie wnoszą opłat.

1. Zgłaszanie artykułów

Prace przeznaczone do opublikowania w „WS” należy przesyłać za pośrednictwem platformy Editorial System: www.editorialsystem.com/ws.

Zgłaszany artykuł powinien być zanonimizowany, tj. pozbawiony informacji o autorze/autorach (również we właściwościach pliku), podziękowań i informacji o źródłach finansowania, a także innych informacji wskazujących na afiliację lub umożliwiających zidentyfikowanie autora. Jeżeli w pracy występują tablice, wykresy lub mapy, powinny być umieszczone w treści artykułu. Materiały graficzne, razem z danymi do nich, należy ponadto załączyć jako osobny plik / osobne pliki, najlepiej w formacie Excel. **Prosimy o niestosowanie stylów i ograniczenie formatowania do wymogów redakcyjnych.** Więcej informacji w pkt 4 *Wymogi redakcyjne*.

Razem z artykułem należy przesyłać skan/zdjęcie oświadczenia o udzieleniu licencji. **Załączenie oświadczenia jest warunkiem poddania pracy ocenie wstępnej i skierowania do recenzji.**

Artykuły zgłaszane od 2022 r. do opublikowania w „WS” są udostępniane na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa – Na tych samych warunkach 4.0 (CC BY-SA 4.0), która jest dostępna na stronie <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pl>.

Autorzy mają prawo do samodzielnego umieszczenia w wybranych przez siebie repozytoriach artykułu w wersji zarówno zgłoszonej do „WS”, jak i zaakceptowanej do opublikowania

oraz opublikowanej, z zastrzeżeniem wymogu niezwłocznego podania w repozytorium informacji o numerze „WS”, w którym praca się ukazała, wraz z linkiem do niej (DOI).

Więcej informacji: Zgłaszanie artykułów w zakładce Dla autorów.

2. Przebieg prac redakcyjnych

Zgłoszony artykuł jest oceniany i opracowywany w czteroetapowym procesie:

1. **Ocena wstępna**, dokonywana przez redakcję. Polega na weryfikacji: naukowego charakteru artykułu, zgodności jego tematyki z profilem czasopisma, struktury i zawartości pracy pod kątem wymogów redakcyjnych oraz oryginalności (wykrywanie programem antyplagiatorywnym treści zapożyczonych, a także wygenerowanych za pomocą narzędzi sztucznej inteligencji). Na jej podstawie formułowane są uwagi i zalecenia dla autora. Poprawiona/uzupełniona przez autora praca jest kierowana do recenzji. W przypadku negatywnej weryfikacji artykuł zostaje odrzucony, a autor otrzymuje decyzję wraz z uzasadnieniem.
2. **Ocena recenzentów**, dokonywana przez specjalistów w danej dziedzinie. Artykuł oceniają dwaj recenzenci spoza jednostki naukowej, przy której afiliowany jest autor, i spoza Zespołu Redakcyjnego „WS”; w przypadku pracy w języku angielskim co najmniej jeden recenzent jest afiliowany przy jednostce zagranicznej. W razie sprzecznych opinii dwóch recenzentów powoływany jest trzeci recenzent. Recenzenci kierują się kryteriami oryginalności i jakości opracowania zarówno w odniesieniu do treści, jak i formy artykułu.

Autor pracy, która otrzymała dwie pozytywne oceny, wprowadza poprawki zalecane przez recenzentów i przesyła do redakcji skorygowaną wersję tekstu. Jeśli pojawi się różnica zdań dotycząca zasadności proponowanych zmian, autor jest zobligowany do uzasadnienia swojego stanowiska.

3. **Ocena redakcji**, decydująca o przyjęciu pracy do publikacji. Polega m.in. na weryfikacji dokonania przez autora zmian w artykule stosownie do uwag recenzentów. Redakcja ocenia artykuł pod względem poprawności i spójności merytorycznej oraz zaleca autorowi wprowadzenie poprawek, jeśli są one konieczne, aby praca spełniała wymogi czasopisma.

W „WS” publikowane są wyłącznie te artykuły, które otrzymają pozytywną ocenę na każdym z wymienionych etapów i zostaną poprawione przez autora zgodnie z otrzymanymi uwagami (chyba że autor przedstawi argumenty uzasadniające nieuwzględnienie danej uwagi).

Artykuły przyjęte do publikacji są zamieszczane na stronie internetowej czasopisma w zakładce Early View, gdzie znajdują się do czasu opublikowania w konkretnym wydaniu.

4. **Opracowanie redakcyjne, autoryzacja i korekta**. Artykuł zakwalifikowany do druku jest poddawany opracowaniu redakcyjnemu, a następnie – po autoryzacji – przekazywany do składu, łamania i opracowania graficznego. Następnie wykonywane są co najmniej dwie korekty wydawnicze. Autor wykonuje korektę autorską na etapie drugiej korekty wydawniczej.

Redakcja zastrzega sobie prawo do zmiany tytułu i śródtytułów, modyfikowania tablic, wykresów i innych elementów graficznych oraz przerezegowywania treści bez naruszenia zasadniczej myśli autora.

W przypadku odkrycia błędów w opublikowanym artykule zamieszcza się na łamach „WS” sprostowanie lub erratę, a artykuł w wersji elektronicznej jest poprawiany i umieszczany na stronie internetowej „WS” z adnotacją o dokonanej poprawce.

3. Zasady etyki publikacyjnej

Wszyscy uczestnicy procesu publikacyjnego są zobowiązani do przestrzegania zasad etyki publikacyjnej. Zasady przyjęte w „Wiadomościach Statystycznych. The Polish Statistician” („WS”) opierają się na wytycznych Komitetu ds. Etyki Publikacyjnej (Committee on Publication Ethics – COPE), które są dostępne na stronie internetowej www.publicationethics.org.

W celu zapewnienia transparentności w publikowaniu wyników badań naukowych wymagane jest, aby każdy uczestnik procesu publikacyjnego zgłaszał potencjalne konflikty interesów. Przez konflikt interesów rozumiane jest

wszystko, co zakłóca lub może być w sposób uzasadniony postrzegane jako zakłócające pełne i obiektywne prezentowanie i recenzowanie artykułów przesłanych do czasopisma, podejmowanie decyzji redakcyjnych w ich sprawie lub ich publikowanie. Konflikty interesów mogą mieć charakter finansowy lub niefinansowy, zawodowy lub osobisty i mogą powstać w stosunkach z instytucją lub inną osobą [na podstawie: <https://journals.plos.org/plosone/s/competing-interests>].

Redakcja nie toleruje przejawów nierzetelności naukowej, takich jak:

- plagiat – przywłaszczenie cudzego utworu lub jego fragmentu bez podania informacji o źródle;
- autoplagiat – ponowne publikowanie własnego utworu lub jego części;
- fabrykowanie danych – oparcie pracy naukowej na nieprawdziwych wynikach badań;
- autorstwo widmowe (*ghost authorship*) – nieujawnianie współautorów, mimo że wnieśli oni istotny wkład w powstanie artykułu;
- autorstwo gościnne (*guest authorship*) – podawanie jako współautorów osób o znikomym udziale lub niebiorących udziału w tworzeniu artykułu, aby lista autorów wyglądała bardziej imponująco;
- autorstwo grzecznościowe (*gift authorship*) – dodawanie jako współautorów osób, których wkład jest oparty jedynie na słabym powiązaniu z badaniem, w ramach przysługi, uznania lub uprzejmości.

Odpowiedzialność poszczególnych uczestników procesu publikacyjnego w zakresie etyki publikacyjnej jest przedstawiona poniżej.

3.1. Odpowiedzialność autorów

3.1.1. Oryginalność pracy

Artykuły naukowe zgłaszane do publikacji w „WS” muszą stanowić własność intelektualną autorów i być pracami oryginalnymi, nie mogą naruszać praw autorskich innych osób, być wcześniej publikowane ani złożone w innym wydawnictwie (także w innej wersji językowej), a w przypadku wykorzystania narzędzi sztucznej inteligencji autorzy muszą mieć większościowy wkład twórczy w powstanie artykułu, co deklarują w oświadczeniu. W przypadku złożenia artykułu w innym wydawnictwie przed ukazaniem się go w „WS” autorzy są zobowiązani do niezwłocznego powiadomienia o tym redakcji.

Jeżeli materiały, na podstawie których powstał artykuł, były prezentowane publicznie, np. podczas konferencji, to autorzy powinni poinformować o tym redakcję, zgłaszając tekst do publikacji w „WS”.

Jeśli autorzy zgłoszonego artykułu umieścili go w repozytorium przed opublikowaniem w „WS”, to niezwłocznie po ukazaniu się numeru „WS” z tym artykułem powinni podać przy artykule zamieszczonym w repozytorium link do publikacji w „WS”.

3.1.2. Autorstwo

Autorzy ponoszą odpowiedzialność za treści prezentowane w artykułach.

W artykule muszą być wskazane wszystkie osoby, które wniosły znaczący wkład w jego powstanie. Niedopuszczalne jest autorstwo widmowe, gościnne i grzecznościowe.

Autor zgłaszający artykuł określa procentowy udział autorów i ich wkład odpowiednio dla:

- koncepcji i projektu badania;
- gromadzenia lub zestawiania danych;
- analizy i interpretacji danych;
- napisania artykułu;
- krytycznego zrecenzowania artykułu;
- zatwierdzenia ostatecznej wersji artykułu.

Wszelkie zmiany na liście autorów (dodawanie lub usuwanie nazwisk i zmiana kolejności autorów) po zgłoszeniu artykułu do publikacji w „WS” wymagają przesłania do redakcji formularza zmiany na liście autorów podpisanego przez wszystkich autorów. Redakcja nie rozstrzyga ewentualnych sporów między autorami, a w przypadku braku możliwości uzgodnienia między nimi wspólnego stanowiska wycofuje artykuł z publikacji.

W przypadku śmierci jednego z autorów przed opublikowaniem artykułu współautorzy poręczają za niego w zakresie jego wkładu i potencjalnych konfliktów interesów.

Wkład innych osób w powstanie artykułu, który nie spełnia kryteriów autorstwa, taki jak wspieranie badania, ogólny mentoring, pełnienie funkcji koordynatora badania i inne powiązane działania, można wskazać w części artykułu pt. „Podziękowania”.

Każdy autor powinien posługiwać się identyfikatorem Open Researcher Contributor ID.

3.1.3. Rzetelność badań

Artykuły naukowe powinny zawierać precyzyjny opis badanych zjawisk i stosowanych metod oraz autorskie wnioski.

3.1.4. Cytowanie

Wszystkie zawarte w artykule informacje, dane i stwierdzenia niebędące autorskimi i wykraczające poza wiedzę powszechną muszą być opatrzone przypisem bibliograficznym, niezależnie od tego, czy są ujęte w ramy cytatu, czy nie są dosłownie przytaczane.

Autorzy artykułu ponoszą odpowiedzialność za właściwe oznaczanie cytowanych prac innych autorów.

3.1.5. Dane i odtwarzalność badań

Autorzy powinni dokładnie opisać dane użyte w badaniu empirycznym, aby umożliwić powtórzenie badania. Są także zobowiązani do udostępnienia surowych danych badawczych na

prośbę redakcji. Jeżeli spełnienie tej prośby nie jest możliwe z istotnych powodów, powinni uzasadnić swoją odmowę.

3.1.6. Użycie narzędzi sztucznej inteligencji

Podczas zbierania i analizy danych, pisania artykułu i opracowywania elementów graficznych autorzy mogą wspomagać się narzędziami sztucznej inteligencji, ale to oni powinni mieć większościowy wkład twórczy w powstanie artykułu i są w pełni odpowiedzialni za treści wygenerowane automatycznie, a tym samym za wszelkie związane z tym naruszenia etyki publikacyjnej. Są także zobowiązani do poinformowania redakcji o użyciu narzędzi sztucznej inteligencji. Takie narzędzia nie mogą być wskazane jako współautorzy.

Artykuł, w przypadku którego autorzy nie mają większościowego wkładu twórczego i który w przeważającej części powstał przy użyciu narzędzi sztucznej inteligencji, nie może być uznany za oryginalną pracę naukową i przyjęty do publikacji.

Niniejsze wytyczne nie obejmują narzędzi, które są używane do poprawy pisowni, gramatyki i ogólnej edycji.

Ostateczną decyzję o tym, czy użycie narzędzi sztucznej inteligencji jest właściwe lub dopuszczalne w przypadku danego artykułu, podejmuje redaktor naczelny.

3.1.7. Konflikt interesów

Autorzy są zobowiązani do zgłoszenia redakcji wszystkich potencjalnych konfliktów interesów odnoszących się do badania przedstawionego w artykule.

Autorzy podają w artykule źródła finansowania badania.

Niezgłoszenie istniejącego konfliktu interesów może skutkować odrzuceniem artykułu.

Ujawnienie konfliktu interesów autorów, który miał nadmierny wpływ na artykuł lub jego recenzje, po publikacji będzie skutkowało retrakcją artykułu.

3.1.8. Współpraca

Autorzy biorą udział w procesie recenzowania *double-blind peer review*, dokonywanej przez co najmniej dwóch niezależnych ekspertów z danej dziedziny. Po otrzymaniu minimum dwóch pozytywnych recenzji autorzy wprowadzają zalecane przez recenzentów poprawki i przesyłają do redakcji zaktualizowaną wersję artykułu wraz z poświadczeniem uwzględnienia poprawek.

W przypadku różnicy zdań co do zasadności proponowanych zmian i nieuwzględnienia którejś z zalecanych poprawek autorzy uzasadniają swoje stanowisko.

Autorzy zatwierdzają artykuł po opracowaniu redakcyjnym (autoryzują go) i biorą udział w korekcie autorskiej.

W razie zgłaszania przez czytelników zastrzeżeń do opublikowanych artykułów ich autorzy są zobligowani do udzielenia odpowiedzi za pośrednictwem redakcji.

3.1.9. Błędy w artykule

Jeżeli autor zauważy błędy w swoim artykule, to powinien niezwłocznie zgłosić je redakcji. Dotyczy to zarówno wszystkich etapów procesu publikacyjnego, jak i czasu po opublikowaniu artykułu. Redakcja we współpracy z autorem podejmie odpowiednie kroki, takie jak: wprowadzenie poprawek, opublikowanie sprostowania lub erraty albo wycofanie artykułu (retrakcja).

3.2. Odpowiedzialność redakcji

3.2.1. Obiektywizm i uczciwość

Redakcja podejmuje decyzję o publikacji danego artykułu, kierując się kryteriami merytorycznej oceny wartości artykułu, jego oryginalności, rzetelności i jasności przekazu, a także ścisłego związku z celem i zakresem tematycznym „WS”. Ocenia artykuły niezależnie od płci, rasy, pochodzenia etnicznego, narodowości, religii, wyznania, światopoglądu, niepełnosprawności, wieku lub orientacji seksualnej ich autorów.

3.2.2. Przeciwdziałanie nierzetelności naukowej

Redakcja nie toleruje przejawów nierzetelności naukowej, takich jak: plagiat, autoplagiat, fabrykowanie danych oraz autorstwo widmowe, gościnne i grzecznościowe.

Jeżeli na którymkolwiek etapie procesu publikacyjnego powstaje uzasadnione podejrzenie, że autorzy dopuścili się nierzetelności naukowej, redakcja skrupulatnie bada sprawę zgodnie z zasadami COPE określonymi na stronie <https://publicationethics.org/guidance/Flowcharts>. W przypadku udowodnienia nierzetelności autorów zgłoszony przez nich artykuł zostaje odrzucony (w przypadku opublikowanego artykułu – wycofany), a autorzy otrzymują informację o podjętej decyzji wraz z uzasadnieniem. Redakcja informuje o nierzetelności autorów odpowiednio podmioty (instytucje zatrudniające autorów, towarzystwa naukowe itp.).

W celu uzyskania obiektywnej oceny oryginalności nadsyłanych artykułów przed skierowaniem ich do recenzji redakcja wykorzystuje system antyplagiatowy. W przypadku wykrycia znacznego podobieństwa artykułu do innych prac lub wysokiego prawdopodobieństwa użycia narzędzi sztucznej inteligencji redaktor naczelny, po zasięgnięciu opinii pozostałych członków redakcji i Rady Konsultacyjnej, podejmuje decyzję o przyjęciu lub odrzuceniu artykułu. W przypadku odrzucenia autor otrzymuje decyzję wraz z uzasadnieniem.

3.2.3. Konflikt interesów

Redaktorzy są zobowiązani do zgłoszenia wszelkich potencjalnych konfliktów interesów odnoszących się do autorów, badań przedstawianych w artykułach i instytucji je finansujących. Nie mogą być zaangażowani w decyzje redakcyjne dotyczące artykułów ich autorstwa zgłoszonych do publikacji w „WS”. W przypadku gdy ich własne interesy mogą utrudniać im bezstronną ocenę danego artykułu i dotyczącą go decyzję o publikacji, powinni wycofać się z jego oceny lub dyskusji na jego temat.

W celu zapobiegania konfliktom interesów między recenzentami a autorami oraz zapewnienia uczciwego i bezstronnego procesu recenzowania redakcja wybiera recenzentów spośród specjalistów spoza jednostki, do której afiliowani są autorzy, i spoza Zespołu Redakcyjnego.

Jeżeli po opublikowaniu artykułu zostanie ujawniony konflikt interesów autorów, to redakcja zbada, czy miał on nadmierny wpływ na artykuł lub jego recenzje. W przypadku gdy taki wpływ zostanie stwierdzony, artykuł podlega retrakcji.

3.2.4. Poufność

Informacje dotyczące artykułu są poufne. Redaktorowi ani żadnemu innemu pracownikowi redakcji nie wolno ich ujawnić nikomu poza autorami, recenzentami, doradcami i – jeśli to uzasadnione – wydawcą.

W przypadku podjęcia decyzji o niepublikowaniu artykułu nie może on zostać w żaden sposób wykorzystany przez wydawcę lub uczestników procesu publikacyjnego bez pisemnej zgody autorów.

3.2.5. Dyskusja na temat opublikowanych artykułów

Każdy może zgłosić redakcji błędy lub naruszenia dostrzeżone w opublikowanych artykułach. Postępowanie redakcji w takich przypadkach zostało określone w punktach 3.2.6–3.2.8.

Redakcja publikuje również nadesłane polemiki z opublikowanymi artykułami.

3.2.6. Poprawki w opublikowanym artykule

W przypadku odkrycia przez autorów lub czytelników błędów w opublikowanym artykule redakcja ocenia, na ile są one istotne, i podejmuje stosowne działania.

Jeżeli wykryte błędy wpływają na interpretację danych lub przedstawionych informacji, a ich poprawienie nie powoduje naruszenia naukowej integralności artykułu, to redakcja we współpracy z autorem:

- w przypadku wersji Early View poprawia artykuł i dołącza do niego adnotację o dokonanej poprawce, z podaniem daty;
- w przypadku ostatecznej wersji publikacyjnej poprawia artykuł i dołącza do niego adnotację o dokonanej poprawce, z podaniem daty, a równocześnie opracowuje sprostowanie (jeżeli błędy są zawinione przez autora) lub erratę (jeżeli błędy powstały w trakcie przygotowania do publikacji) i publikuje na numerowanej stronie w najbliższym wydaniu „WS”.

Drobne usterki redakcyjne lub techniczne, które nie wpływają na znaczenie lub interpretację artykułu:

- w przypadku wersji Early View zawsze są korygowane; adnotacja o dokonanej poprawce nie jest dołączana;
- w przypadku ostatecznej wersji publikacyjnej zazwyczaj nie są, ale mogą być korygowane; adnotacja o dokonanej poprawce nie jest dołączana.

Redakcja powiadamia autorów o dokonaniu poprawek w opublikowanym artykule, a także archiwizuje wszystkie wersje artykułu.

Treści wykraczające poza pierwotny zakres artykułu, takie jak dodatkowe odniesienia lub aktualizacje oparte na informacjach niedostępnych w momencie publikacji artykułu, nie są dawane.

3.2.7. Wycofanie (retrakcja) opublikowanego artykułu

Jeżeli po opublikowaniu w artykule zostaje wykryty poważny błąd lub naruszenie (np. oszustwo, plagiat, naruszenie praw autorskich, powielona publikacja, nieujawniony konflikt interesów, wykorzystanie informacji poufnych niezgodnie z prawem), które unieważniają przedstawione w artykule ustalenia, to artykuł podlega retrakcji. Redakcja postępuje wtedy w następujący sposób:

- w najbliższym numerze „WS” publikowana jest notatka o wycofaniu artykułu podpisana przez autorów lub redaktora naczelnego, z podaniem daty i powodu wycofania artykułu oraz linkiem do oryginalnego artykułu;
- oryginalny artykuł pozostaje niezmienny, z wyjątkiem umieszczenia znaku wodnego na każdej stronie pliku PDF o treści „artykuł wycofany”.

3.2.8. Zastrzeżenia redakcji dotyczące opublikowanego artykułu

Jeżeli istnieją uzasadnione obawy co do rzetelności badania przedstawionego w opublikowanym artykule lub podejrzenia jakichkolwiek nieprawidłowości (dowody na niepoprawność badania przeprowadzonego przez autorów nie są rozstrzygające, ale charakter wątpliwości uzasadnia powiadomienie czytelników; istnieje uzasadniona obawa, że ustalenia są niewiarygodne lub że mogło dojść do nieprawidłowości), redakcja może opublikować notatkę z zastrzeżeniami, że do wyników przedstawionego w nim badania należy podchodzić z ostrożnością. Takie zastrzeżenia są publikowane jedynie w przypadku, gdy dochodzenie dotyczące artykułu nie przyniosło rezultatów. Redakcja może opublikować swoje zastrzeżenia również wtedy, gdy dochodzenie w sprawie wątpliwego artykułu jest w toku.

3.3. Odpowiedzialność recenzentów

3.3.1. Rzetelność i terminowość

Recenzenci przyjmują artykuł do zrecenzowania, jeśli posiadają odpowiednią wiedzę w określonej dziedzinie, aby rzetelnie ocenić pracę, a także gdy mogą wywiązać się z terminu ustalonego przez redakcję, aby nie opóźniać publikacji.

3.3.2. Obiektywizm

Recenzenci uczestniczą w procesie opartym na modelu *double-blind peer review*, zgodnie z którym nie znają tożsamości autorów ani ich tożsamość nie jest znana autorom.

Recenzenci oceniają artykuł zgodnie z kryteriami zawartymi w karcie recenzji „WS”. Powinni uzasadnić swoją ocenę, przedstawiając stosowną argumentację. Są zobligowani do zachowania obiektywności i powstrzymania się od osobistej krytyki.

3.3.3. Wsparcie redakcji

Recenzenci wspierają redakcję w ocenie artykułów zgłoszonych do publikacji. Ich zadaniem jest wyrażenie opinii, czy artykuł:

- może być opublikowany w obecnej formie;
- może być opublikowany po uwzględnieniu zalecanych poprawek;
- wymaga znacznej modyfikacji i ponownej oceny recenzenta (w ponownej ocenie zapada ostateczna decyzja o dopuszczeniu do publikacji lub odrzuceniu);
- nie powinien zostać opublikowany.

3.3.4. Wsparcie autora

Recenzenci powinni wskazać ważne dla wyników badań opublikowane prace, które w ich ocenie powinny zostać przywołane w ocenianym artykule.

3.3.5. Użycie narzędzi sztucznej inteligencji

Niedopuszczalne jest korzystanie z narzędzi sztucznej inteligencji podczas sporządzania recenzji, z wyjątkiem narzędzi, które są używane do poprawy pisowni, gramatyki i ogólnej edycji.

3.3.6. Przeciwdziałanie nierzetelności naukowej

W razie stwierdzenia wysokiego poziomu zbieżności treści recenzowanej pracy z innymi opublikowanymi materiałami lub podejrzenia innych przejawów nierzetelności naukowej recenzenci informują o tym redakcję.

3.3.7. Konflikt interesów

Recenzenci są zobowiązani do zgłoszenia redakcji – zgodnie z ich stanem wiedzy – wszelkich potencjalnych konfliktów interesów odnoszących się do autorów, przedstawionych w artykule badań i instytucji je finansujących. Jeżeli uznają, że istnieje taki konflikt interesów, to powinni odstąpić od recenzowania artykułu.

3.3.8. Poufność

Recenzenci powinni traktować artykuły przesłane im do zrecenzowania jako poufne. Nie mogą ich udostępniać ani omawiać z osobami spoza redakcji, chyba że redakcja wyrazi na to zgodę. Po ukończeniu recenzji przechowywanie przesłanych przez redakcję materiałów (w jakiegokolwiek formie) oraz posługiwanie się nimi przez recenzentów jest niedozwolone.

3.4. Odpowiedzialność wydawcy

3.4.1. Ochrona własności intelektualnej

Materiały opublikowane w „WS” są chronione prawem autorskim. Od 2022 r. autorzy udzielają wydawcy – Głównemu Urzędowi Statystycznemu – licencji Creative Commons Uznanie autorstwa – Na tych samych warunkach 4.0 (CC BY-SA 4.0), która jest dostępna na stronie <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pl>. Szczegółowa informacja o prawach autorskich (copyright) jest podawana przy każdym artykule, zarówno w wersji elektronicznej, jak i drukowanej.

3.4.2. Otwarty dostęp

Wydawca udostępnia pełną treść artykułów w internecie w trybie otwartego dostępu, tj. bezpłatnie i bez technicznych ograniczeń. Użytkownicy mogą czytać, pobierać, kopiować, drukować i wykorzystywać do innych celów artykuły zamieszczone na stronie internetowej czasopiśma, zgodnie z zapisami:

- ustawy o otwartych danych i ponownym wykorzystywaniu informacji sektora publicznego w przypadku artykułów zgłoszonych do 31.12.2021 r.;
- licencji Creative Commons w przypadku artykułów zgłoszonych po 31.12.2021 r. Inne sposoby wykorzystania treści artykułów „WS” wymagają zgody wydawcy.

3.4.3. Sprostowania, erraty i przeprosiny

Wydawca deklaruje gotowość do opublikowania sprostowań, errat i przeprosin.

3.5. Odwołania i skargi

3.5.1. Odwołania

Autorzy mogą się odwołać od decyzji o niepublikowaniu artykułu. W tym celu powinni skontaktować się z redaktorem naczelnym lub sekretarzem redakcji i przedstawić stosowną argumentację. Odwołania autorów są rozpatrywane przez redaktora naczelnego.

3.5.2. Skargi

Każdy uczestnik procesu publikacyjnego oraz czytelnicy mają prawo do złożenia skargi. Skargę należy przesłać do adres redakcji udostępniony w zakładce Kontakt.

4. Wymogi redakcyjne

Zgodnie z wymogami czasopisma omawiany w artykule problem badawczy powinien być jednoznacznie zdefiniowany oraz istotny dla oceny zjawisk społecznych lub gospodarczych. Artykuł powinien zawierać wyraźnie określony cel badania, precyzyjny opis badanych zjawisk i stosowanych metod, uzyskane wyniki przeprowadzonej analizy oraz autorskie wnioski.

4.1. Struktura i zawartość artykułu

Wymagane elementy artykułu recenzowanego:

1. Tytuł.
2. Dane autora: imię/imiona i nazwisko, afiliacja w języku polskim i angielskim, ORCID, e-mail. W przypadku artykułu wieloautorskiego należy wskazać autora korespondencyjnego.
3. Streszczenie (zalecana objętość – do 1200 znaków ze spacjami, forma bezosobowa). W przypadku artykułu opisującego badanie empiryczne powinno zawierać: cel, przedmiot, okres i metodę badania, źródła danych i najważniejsze wnioski z badania. W przypadku artykułów o innym charakterze należy podać co najmniej cel artykułu, przedmiot i najważniejsze wnioski.

Streszczenie to podstawowe źródło informacji o artykule, warunkujące też decyzję czytelnika o zapoznaniu się z całą pracą. Dlatego powinno być przygotowane ze szczególną starannością i dbałością o umieszczenie w nim wszystkich wymaganych elementów.

4. Słowa kluczowe – najistotniejsze pojęcia lub wyrażenia użyte w pracy (nie mniej niż trzy). Powinny być zawarte w streszczeniu i/lub tytule.
5. Kod/kody z klasyfikacji Journal of Economic Literature (JEL).
6. Tłumaczenie tytułu, streszczenia i słów kluczowych (na język angielski w przypadku artykułu napisanego w języku polskim, a na język polski w przypadku artykułu napisanego w języku angielskim).
7. W artykule opisującym badanie empiryczne wymagane są następujące części:
 - *Wprowadzenie*, zawierające syntetyczne przedstawienie zagadnień teoretycznych, uzasadnienie podjęcia danego problemu badawczego, cel badania i krytyczne odniesienie do

literatury przedmiotu. W wyjątkowych przypadkach, kiedy istotne dla podjętego tematu jest obszerniejsze przedstawienie dyskusji toczącej się w literaturze, przegląd literatury może stanowić odrębną część artykułu;

- *Metoda badania*, uwzględniająca przedmiot i okres badania, źródła danych i zastosowane metody badawcze, w tym uzasadnienie ich wyboru;
- *Wyniki badania* – analiza danych oraz interpretacja wyników i odniesienie ich do rezultatów wcześniejszych badań (dyskusja). W uzasadnionych przypadkach dyskusja może stanowić odrębną część artykułu;
- *Podsumowanie*, które powinno być zwięzłe i odzwierciedlać istotę problemu badawczego przedstawionego w artykule, bez podawania danych liczbowych; końcowe wnioski powinny odnosić się do treści artykułu, a w szczególności do celu badania;
- *Bibliografia*, zawierająca pełny wykaz prac i materiałów przywołanych w artykule, przygotowana zgodnie z wymogami czasopisma (zob. Przywoływanie źródeł w artykułach napisanych w języku polskim oraz Bibliografia załącznikowa w artykułach napisanych w języku polskim).

Wszystkie części powinny być opatrzone numerami.

8. Jeżeli podczas gromadzenia i analizy danych, pisania artykułu lub opracowywania elementów graficznych do niego autor korzystał z narzędzi sztucznej inteligencji, to powinien podać w tekście, jakich narzędzi i do czego użył.

W przypadku artykułu nierecenzowanego nie są wymagane streszczenie, słowa kluczowe ani kody JEL. Bibliografia załącznikowa jest opcjonalna.

4.2. Przygotowanie artykułu

1. Artykuł powinien być utrzymany w formie bezosobowej.
2. Tekst należy zapisać alfabetem łacińskim. Nazwy własne, tytuły itp. oryginalnie zapisane innym alfabetem powinny być poddane transliteracji.
3. Nie należy stosować stylów; formatowanie należy ograniczyć do wymogów redakcyjnych.
4. Objętość artykułu łącznie ze streszczeniem, słowami kluczowymi, bibliografią, tablicami, wykresami i innymi materiałami graficznymi nie powinna być mniejsza niż 10 stron maszynopisu ani przekraczać 20 stron.
5. Edytor tekstu: Microsoft Word, format *.doc lub *.docx.
6. Krój czcionki:
 - Arial – tytuł, autor, streszczenie, słowa kluczowe, kody JEL, śródtytuły, elementy graficzne (tablice, zestawienia, wykresy, schematy), przypisy;
 - Times New Roman – tekst główny, bibliografia.
7. Wielkość czcionki:
 - 14 pkt – tytuł, autor, śródtytuły wyższego rzędu;
 - 12 pkt – tekst główny, śródtytuły niższego rzędu;
 - 10 pkt – pozostałe elementy.
8. Marginesy – 2,5 cm z każdej strony.
9. Interlinia – 1,5 wiersza; tablice i przypisy – 1 wiersz; przed tytułami rozdziałów i podrozdziałów oraz po nich – pusty wiersz.

10. Wcięcie akapitowe – 0,4 cm; bibliografia – bez wcięcia, wysunięcie 0,4 cm.
11. Przy wycieniach należy posłużyć się listą punktowaną z punktarami w postaci kropek (wysunięcie 0,4 cm, wcięcie 0 cm); wiersze (oprócz ostatniego) zakończone średnikiem.
12. Strony ponumerowane automatycznie.
13. Tablice i elementy graficzne (wykresy, mapy, schematy) muszą być przywołane w tekście.
14. Wykresy, mapy i schematy należy zamieścić w tekście głównym. Wykresy powinny być edytowalne (optymalnie wykonane w programie Excel; w przypadku wykonania w programie graficznym powinny mieć postać wektorową). Wykresy i inne materiały graficzne należy przekazać osobno, najlepiej w pliku programu Excel lub innym edytowalnym w pakiecie Microsoft Office.
15. Tablice muszą być edytowalne. Nie należy stosować rastrów, cieniowania, pogrubiania czy też podwójnych linii itp.
16. Wskazówki dotyczące opracowywania map znajdują się w publikacji *Mapy statystyczne. Opracowanie i prezentacja danych*, dostępnej na stronie internetowej GUS.
17. Pod tablicami i każdym elementem graficznym należy podać źródło opracowania, a także objaśnić użyte w nich skróty i symbole.
18. Literowe symbole liczb i innych wielkości niezłożonych należy zapisywać małą lub dużą literą i pismem pochyłym (np. a , A , $y(x)$, a_i); wektorów – pismem pochyłym i pogrubionym (np. \mathbf{a} , \mathbf{A} , \mathbf{w} , $\mathbf{y}(x)$, \mathbf{w}_i); macierzy – pismem prostym i pogrubionym (np. \mathbf{A} , \mathbf{a} , \mathbf{M} , $\mathbf{Y}(x)$, \mathbf{M}_i).
19. Objasnienia znaków umownych i zapisów w tablicach: kreska (–) – zjawisko nie wystąpiło; zero (0) – zjawisko istniało w wielkości mniejszej od 0,5; (0,0) – zjawisko istniało w wielkości mniejszej od 0,05; kropka (.) – brak informacji, konieczność zachowania tajemnicy statystycznej, wypełnienie pozycji jest niemożliwe lub niecelowe; „w tym” – oznacza, że nie podaje się wszystkich składników sumy.
20. Stosowane są następujące skróty: tablica – tabl., wykres – wykr.
21. Wszystkie zawarte w artykule informacje, dane i stwierdzenia wykraczające poza wiedzę powszechną – np. wyniki badań innych autorów, zarówno o charakterze empirycznym, jak i koncepcyjnym – muszą być opatrzone przypisem bibliograficznym. Przez wiedzę powszechną należy rozumieć informacje ogólnie znane i niebudzące wątpliwości ani kontrowersji w danej grupie społecznej, np. utworzenie GUS w 1918 r. lub powstanie UE w 1993 r. na podstawie traktatu z Maastricht. Natomiast dane statystyczne udostępniane lub publikowane np. przez GUS lub Eurostat nie należą do takich informacji. Charakteru wiedzy powszechnej nie mają również stwierdzenia odnoszące się do idei, zjawisk i procesów społecznych, politycznych czy gospodarczych. Nawet pozornie zdroworozsądkowe idee zmieniają bowiem swój sens w zależności od kultury, języka lub dyscypliny naukowej, a także bywają w rozmaity sposób konceptualizowane, jak np. pojęcie poznania w naukach społecznych.
Podanie źródła jest konieczne niezależnie od tego, czy informacje lub stwierdzenia są ujęte w ramy cytatu, czy przedstawione bez dosłownego przytoczenia, np. w formie parafrazy. Jeżeli stwierdzenie może budzić jakiegokolwiek wątpliwości odbiorców, autor powinien wskazać stosowne źródło podawanej informacji.
22. Przypisy rzeczowe, słownikowe lub informacyjne należy umieszczać na dole strony. Przypisy bibliograficzne, zgodnie ze standardem APA (American Psychological Association), należy podawać w tekście głównym.
23. Bibliografię należy przygotować zgodnie ze standardem APA.

4.3. Przywoływanie źródeł w artykułach w języku polskim

4.3.1. Ogólne zasady stylu APA

Wyszczególnienie		Przykład przywołania	
		w odsyłaczu (w nawiasie)	w treści zdania
Autor indywidualny			
Jeden autor		(Filipiak, 2001)	Filipiak (2001)
Dwóch autorów		(Dąbrowska i Nowak, 1999)	Dąbrowska i Nowak (1999)
Trzech autorów lub więcej		(Jankiewicz i in., 2003)	Jankiewicz i in. (2003)
Dwie prace z tego samego roku, czterech autorów, w tym:	ten sam pierwszy autor	(Bągińska, Radwan i in., 2017) (Bągińska, Szewczyk i in., 2017)	Bągińska, Radwan i in. (2017) Bągińska, Szewczyk i in. (2017)
	dwa z tych samych pierwszych autorów	(Andrzejewski, Cieślak, Daszkiewicz i Wróblewska, 2023) (Andrzejewski, Cieślak, Pietrzak i Zajac, 2023)	Andrzejewski, Cieślak, Daszkiewicz i Wróblewska (2023) Andrzejewski, Cieślak, Pietrzak i Zajac (2023)
Dwie prace autorów o tym samym nazwisku		(T. Piotrowski i Sadowska, 2015; R. Piotrowski, 2022)	T. Piotrowski i Sadowska (2015), R. Piotrowski (2022)
Autor instytucjonalny			
Nazwa funkcjonuje jako powszechnie znany skrótowiec:	pierwsze przywołanie	(Główny Urząd Statystyczny [GUS], 2020)	Główny Urząd Statystyczny (GUS, 2020)
	kolejne przywołania	(GUS, 2020)	GUS (2020)
Pełna nazwa		(Stanford University, 1995)	Stanford University (1995)
Niepełne dane bibliograficzne			
Nieznany autor		(Tytuł, 2015)	Tytuł (2015)
Nieznany rok wydania		(Kowalczyk, b.r.)	Kowalczyk (b.r.)
Inne przypadki			
Przywoływanie kilku źródeł (porządek prac – chronologiczny, porządek autorów – alfabetyczny)		(Grzenda, b.r., 1997, 2004a, 2004b; Nowak, 2002; Stec, 1987)	Grzenda (b.r., 1997, 2004a, 2004b), Nowak (2002) i Stec (1987)
Przywoływanie źródeł za innym autorem (uwaga: w bibliografii należy wymienić tylko pracę czytaną)		(Nowakowski, 1990, za: Zieniecka, 2007)	Nowakowski (1990, za: Zieniecka, 2007)
Praca tłumaczona, przedruk lub wydanie wznowione		(Adamski, 1857/2020)	Adamski (1857/2020)
Przytaczanie dosłownego cytatu lub parafrazowanie fragmentu cytowanego źródła		(Wójcik, 2021, s. 6–7)	Wójcik (2021, s. 6–7)

Źródło: opracowanie własne na podstawie: American Psychological Association. (2020). *Publication manual of the American Psychological Association* (wyd. 7). <https://doi.org/10.1037/0000165-000>.

4.3.2. Wewnątrz zasady szczegółowe redakcji „WS”

4.3.2.1. Bazy danych Głównego Urzędu Statystycznego

W przypadku korzystania z danych zaczerpniętych z baz Głównego Urzędu Statystycznego trzeba podać w miejscu, w którym baza jest przywoływana po raz pierwszy w artykule:

- pełną nazwę bazy;
- skrótowiec utworzony od tej nazwy, jeśli taki funkcjonuje (w innym wypadku – bez skrótowca);
- nazwę jej właściciela;
- adres internetowy bazy w nawiasie.

W kolejnych przywołaniach, np. w źródle pod wykresem, należy posługiwać się już tylko samą nazwą bazy lub skrótowcem.

Przykładowe bazy danych Głównego Urzędu Statystycznego	
pierwsze przywołanie	kolejne przywołania
Bank Danych Lokalnych (BDL) Głównego Urzędu Statystycznego (https://bdl.stat.gov.pl)	BDL
Dziedzinowe Bazy Wiedzy (DBW) Głównego Urzędu Statystycznego (https://dbw.stat.gov.pl)	DBW
Baza Demografia Głównego Urzędu Statystycznego (https://demografia.stat.gov.pl)	Baza Demografia

4.3.2.2. Akty prawne

Jednokrotne przywołanie

Jeśli autor powołuje się w artykule na akt prawny, to powinien podać jego pełny oficjalny tytuł (bez numeru dziennika urzędowego). W zależności od kontekstu może go ująć:

- w treści zdania, np.

Artykuł 18 ust. 1 Ustawy z dnia 29 czerwca 1995 r. o statystyce publicznej określa stałe elementy składowe każdego badania statystycznego.

- lub w formie odsyłacza bibliograficznego, czyli w nawiasie, np.

Statystyka publiczna zapewnia równopranny, równorzędny i równoczesny dostęp do wynikowych informacji statystycznych (Ustawa z dnia 29 czerwca 1995 r. o statystyce publicznej).

Długi tytuł aktu prawnego można skrócić, zachowując jego początkową część i dodając wielokropek, np.

W latach 2022–2023, dzięki dwóm dyrektywom Unii Europejskiej, wprowadzono 11 kolejnych zmian w prawie pracy wspierających *work-life balance* (Dyrektywa Parlamentu Europejskiego i Rady (UE) 2019/1152 z dnia 20 czerwca 2019 r. w sprawie przejrzystych i przewidywalnych warunków pracy w Unii Europejskiej; Dyrektywa Parlamentu Europejskiego i Rady (UE) 2019/1158 z dnia 20 czerwca 2019 r. w sprawie równowagi między życiem zawodowym a prywatnym rodziców i opiekunów...).

Wielokrotne przywołania

W przypadku gdy autor zamierza odwoływać się w artykule do aktu prawnego więcej niż raz, a tytuł aktu prawnego jest długi, powinien przy pierwszym przywołaniu oprócz jego pełnego oficjalnego tytułu wprowadzić również krótszą nazwę opisową i tylko jej używać w dalszej części pracy, np.

Zgodnie z Rozporządzeniem Parlamentu Europejskiego i Rady (UE) nr 1260/2013 z dnia 20 listopada 2013 r. w sprawie statystyk europejskich w dziedzinie demografii (dalej: rozporządzenie nr 1260/2013) *ludność rezydująca* to ludność mieszkająca w państwie członkowskim nieprzerwanie przez okres co najmniej 12 miesięcy przed czasem odniesienia. [...] Chociaż rozporządzenie nr 1260/2013 obowiązuje od 2013 r., to GUS przekazał do Eurostatu dane o liczbie i strukturze ludności rezydującej również za lata 2009–2012.

W całym artykule należy przyjąć jednolity sposób tworzenia krótszych nazw opisowych aktów prawnych.

Spoza Polski i UE

W przypadku aktów prawnych, które nie zostały wydane ani przez władze Polski, ani władze Unii Europejskiej i są dostępne w języku angielskim (oficjalne tłumaczenie), należy posługiwać się tytułem angielskim, np.

Rada Ministrów Uzbekistanu przyjęła rezolucję, w której określiła zadania organizacji i ministerstw związane z realizacją SDG do 2030 r. (Resolution of the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan No. 841 of 20th October 2018 ‘On measures to implement national goals and objectives in the field of sustainable development until 2030’).

Zapis tytułu aktu prawnego, który nie jest dostępny w języku angielskim, zależy od alfabetu:

- alfabet łaciński – tytuł trzeba przywołać w wersji oryginalnej, np.

Podstawę prawną statystyki publicznej we Francji stanowią zasadniczo dwa dokumenty: ustawa specjalna dotycząca zadań publicznej służby statystycznej (Loi n° 51-711 du 7 juin 1951 sur l’obligation, la coordination et le secret en matière de statistiques) oraz ustawa o ochronie danych, której podlega przetwarzanie danych statystycznych, podobnie jak przetwarzanie danych dotyczących osób fizycznych (Loi n° 78-17 du 6 janvier 1978 relative à l’informatique, aux fichiers et aux libertés).

- alfabet inny niż łaciński – tytuł trzeba poddać transkrypcji, np.

W kwietniu 2021 r. w Serbii przyjęto ustawę o zmianie ustawy o powszechnym spisie ludności, gospodarstw domowych i mieszkań, na mocy której możliwe było przełożenie spisu z powodu pandemii COVID-19 (Zakon o izmjenama zakona o popisu stanovništva, domaćinstava i stanova 2022. Godine).

Tytuły aktów prawnych podawane w tekście i w bibliografii załącznikowej muszą być takie same.

4.4. Bibliografia załącznikowa

4.4.1. Zasady ogólne

1. Bibliografia powinna:

- zawierać wyłącznie źródła przywołane w artykule;
- być zapisana w alfabecie łacińskim (opisy bibliograficzne w innym alfabecie należy podać transkrypcji);
- być uporządkowana alfabetycznie według nazwiska pierwszego autora lub – w przypadku publikacji nieznanego autora – tytułu publikacji (w przypadku tytułów zaczynających się od liczb decyduje pierwsza wymawiana głoska).

2. W opisach bibliograficznych należy podawać:

- pełną nazwę autora instytucjonalnego, nawet jeśli w artykule był używany skrótowiec;
- pełną nazwę wydawcy;
- elementy takie jak: „redaktor” (red.), „wydanie” (wyd.), „tłumaczenie” (tłum.) i „strona” (s.) w skrócie i w języku polskim, niezależnie od języka, w jakim źródło zostało opracowane;
- numer DOI (Digital Object Identifier), jeśli źródło jest nim opatrzone, lub adres strony internetowej, jeśli nie ma DOI, a źródło można znaleźć w internecie. Nie należy zamieszczać linków do baz czasopism czy repozytoriów;
- w przypadku tekstów na stronie internetowej (dostępnych tylko online) – datę dostępu wyłącznie wtedy, gdy zawartość strony nie jest archiwizowana (zmienia się).

3. Zasady porządkowania źródeł są następujące:

- prace jednego autora / kilku tych samych autorów należy ułożyć według roku wydania, zaczynając od najwcześniejszego;
- jeśli kilka prac tego samego autora / tych samych autorów zostało opublikowanych w tym samym roku, należy podać je alfabetycznie według tytułu i odpowiednio oznaczyć poprzez dopisanie przy roku wydania liter a, b, c itd. Dopisek „red.” nie ma wpływu na porządek alfabetyczny takich prac (decydują ich tytuły);
- prace tego samego autora / tych samych autorów z nieznanym rokiem wydania (bez roku – b.r.) trzeba umieścić przed pracami z rokiem wydania, a prace „w druku” – po pracach z rokiem wydania.

4.4.2. Przykłady opisów bibliograficznych

Typ źródła	Przykład opisu bibliograficznego	
Artykuł w czasopiśmie		
W formie:	drukowanej	Nazwisko, X. (rok). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma, rocznik(zeszyt)</i> , strona początku–strona końca.
	elektronicznej, z DOI	Nazwisko, X., Nazwisko 2, Y. (rok). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma, rocznik(zeszyt)</i> , strona początku–strona końca. https://doi.org/xxx .
	elektronicznej, bez DOI	Nazwisko, X., Nazwisko 2, Y., Nazwisko 3, Z. (rok). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma, rocznik(zeszyt)</i> , strona początku–strona końca. https://xxx .
Opublikowany w trybie online first (przed włączeniem do numeru czasopisma)	Nazwisko, X. (rok). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma</i> . Opublikowany w trybie online first. https://xxx .	

Typ źródła (cd.)	Przykład opisu bibliograficznego (cd.)
------------------	--

Artykuł w gazecie codziennej

W formie:	drukowanej	Nazwisko, X. (rok, dzień miesiąc). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma</i> , strona lub strona początku–strona końca.
	elektronicznej	Nazwisko, X. (rok, dzień miesiąc). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma</i> . https://xxx . Nazwisko, X. (b.r.). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma</i> . https://xxx . Tytuł artykułu. (rok, dzień miesiąc). <i>Tytuł czasopisma</i> . https://xxx .

Książka

W formie:	drukowanej	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> . Wydawnictwo.
	elektronicznej, z DOI	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> . Wydawnictwo. https://doi.org/xxx .
	elektronicznej, bez DOI	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> . Wydawnictwo. https://xxx .
W przekładzie		Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> (tłum. Y. Nazwisko). Wydawnictwo.
Wydanie wielotomowe:	tom niezatytułowany	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> (t. numer tomu w alfabecie arabskim). Wydawnictwo.
	tom zatytułowany	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki: t. numer tomu w alfabecie arabskim</i> . <i>Tytuł tomu</i> . Wydawnictwo.
Kolejne wydanie		Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł książki</i> (wyd. numer wydania). Wydawnictwo.
Pod redakcją		Nazwisko, X. (red.). (rok). <i>Tytuł książki</i> . Wydawnictwo.

Rozdział w pracy zbiorowej i hasło słownikowe/encyklopedyczne

Rozdział w pracy zbiorowej		Nazwisko, X. (rok). Tytuł rozdziału. W: Y. Nazwisko, Z. Nazwisko 2 (red.), <i>Tytuł książki</i> (s. strona początku–strona końca). Wydawnictwo.
Hasło ze słownika lub z encyklopedii w formie:	drukowanej	Nazwisko autora hasła, X. (rok). Hasło. W: Y. Nazwisko (red.), <i>Tytuł</i> . Wydawnictwo.
	elektronicznej	Hasło. (rok). W: Y. Nazwisko (red.), <i>Tytuł</i> . Wydawnictwo. https://xxx .

Raporty i szara literatura

Autor:	indywidualny	Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł raportu</i> . Wydawnictwo. https://doi.org/xxx .
	instytucjonalny	Nazwa instytucji. (rok). <i>Tytuł raportu</i> . Wydawnictwo (tylko jeśli wydawcą jest instytucja inna niż autorska).
Working papers		Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł pracy</i> (nazwa serii i numer). https://xxx .

Typ źródła (cd.)		Przykład opisu bibliograficznego (cd.)
Materiały z konferencji		
Opublikowane w formie:	książki	zob. przykład opisu książki lub rozdziału
	czasopisma	zob. przykład opisu artykułu w czasopiśmie
Niepublikowane (wygłoszone)		Nazwisko, X. (rok, dzień miesiąc). <i>Tytuł pracy</i> [typ wystąpienia, np. referat lub prezentacja]. Nazwa i miejsce (miasto, kraj) konferencji.
Rozprawa doktorska		
Niepublikowana		Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł pracy</i> [niepublikowana rozprawa doktorska]. Nazwa instytucji nadającej tytuł doktorski.
Opublikowana, dostępna w internecie		Nazwisko, X. (rok). <i>Tytuł pracy</i> [rozprawa doktorska, nazwa instytucji nadającej tytuł doktorski]. https://xxx .
Maszynopis		
Niepublikowany / przygotowywany przez autora / zgłoszony do publikacji, ale jeszcze niezaakceptowany		Nazwisko, X. (rok). Tytuł [maszynopis niepublikowany / w przygotowaniu / zgłoszony do publikacji].
Artykuł zaakceptowany do publikacji w czasopiśmie		Nazwisko, X. (w druku). Tytuł artykułu. <i>Tytuł czasopisma</i> .
Opublikowany nieformalnie (np. na stronie internetowej autora)		Nazwisko, X. (rok). Tytuł. https://xxx .
Akt prawny¹		
Polski i UE		Pełny tytuł aktu prawnego w języku polskim (numer/pozycja w dzienniku urzędowym).
Spoza Polski i UE	dostępny w języku angielskim	Pełny tytuł aktu prawnego w języku angielskim (numer/pozycja w dzienniku urzędowym). https://xxx .
	dostępny tylko w języku oryginalnym, w alfabecie łacińskim	Pełny tytuł aktu prawnego w języku oryginalnym (numer/pozycja w dzienniku urzędowym). https://xxx .
	dostępny tylko w języku oryginalnym, w innym alfabecie niż łaciński	Pełny tytuł aktu prawnego w transkrypcji z języka oryginalnego (numer/pozycja w dzienniku urzędowym). https://xxx .
Tekst na stronie internetowej (dostępny tylko online)		
Znana data publikacji, zawartość strony jest archiwizowana (nie zmienia się)		Nazwisko, X. (rok, dzień miesiąc). <i>Tytuł</i> . https://xxx .
Nieznana data publikacji, zawartość strony nie jest archiwizowana (zmienia się)		Nazwa instytucji. (b.r.). <i>Tytuł</i> . Pobrane dzień miesiąc rok pobrania z https://xxx .

¹ Wewnętrzne zasady redakcji „WS”.

Typ źródła (dok.)	Przykład opisu bibliograficznego (dok.)
-------------------	---

Zbiór danych pobranych ze strony internetowej

Dane opublikowane:	znana data publikacji, zawartość zbioru jest archiwizowana (nie zmienia się)	Nazwisko, X. (rok). <i>Nazwa zbioru danych</i> [zbiór danych]. Wydawca. https://xxx .
	nieznana data publikacji, zawartość zbioru nie jest archiwizowana (zmienia się)	Nazwa instytucji. (b.r.). <i>Nazwa zbioru danych</i> [zbiór danych]. Wydawca (tylko jeśli wydawcą jest instytucja inna niż autorska / właściciel danych). Pobrane dzień miesiąc rok pobrania z https://xxx .

Materiały audiowizualne

Nagranie wideo	Nazwisko, X. (rok, dzień miesiąc). <i>Tytuł</i> [wideo]. Nazwa kanału, na którym nagranie zostało udostępnione (np. YouTube). https://xxx .
Webinar	Nazwisko, X. lub nazwa instytucji. (rok, dzień miesiąc). <i>Tytuł</i> [webinar].

Posty w serwisach społecznościowych

Post na portalu X lub Instagramie	Nazwisko, X. lub nazwa instytucji [@ nazwa użytkownika] (rok, dzień miesiąc). <i>Treść – do 20 wyrazów</i> [post]. Nazwa serwisu społecznościowego (X lub Instagram). https://xxx .
Post na Facebooku	Nazwisko, X. lub nazwa instytucji [nazwa użytkownika] (rok, dzień miesiąc). <i>Treść – do 20 wyrazów</i> [post]. Facebook. https://xxx .

Źródło: opracowanie własne na podstawie: American Psychological Association. (2020). *Publication manual of the American Psychological Association* (wyd. 7). <https://doi.org/10.1037/0000165-000>.

Praca przygotowana w sposób niezgodny z powyższymi wskazówkami będzie odesłana do autora z prośbą o dostosowanie formy artykułu do wymogów redakcyjnych.

STAŁE DZIAŁY „WS” – ZAKRES TEMATYCZNY PERMANENT SECTIONS OF WS – THEMATIC SCOPE

Tematy artykułów	Topics of the articles
Studia metodologiczne / Methodological studies	
<ul style="list-style-type: none"> • Oryginalne lub udoskonalone rozwiązania metodologiczne, które mogą znaleźć zastosowanie w analizach statystycznych i służyć podnoszeniu ich jakości • Projektowanie badań statystycznych 	<ul style="list-style-type: none"> • Original or developed methodological solutions which can be applied to statistical analyses and serve to improve their quality • Planning statistical surveys
Statystyka w praktyce / Statistics in practice	
<ul style="list-style-type: none"> • Nowatorskie zastosowania narzędzi i modeli statystycznych oraz analiza i ocena statystyczna zjawisk społeczno–gospodarczych i innych, prowadzona w szczególności na danych pochodzących z zasobów statystyki publicznej • Wykorzystanie narzędzi informatycznych do uzyskiwania i przetwarzania informacji statystycznych, naliczania i kontroli ujawniania danych oraz prezentacji i rozpowszechniania danych wynikowych 	<ul style="list-style-type: none"> • Innovative applications of statistical tools and models as well as statistical analysis and assessment of social, economic and other phenomena, performed mainly on data produced by official statistics • Application of IT tools to obtain and process statistical information, to calculate data and control the statistical disclosure, and to present and disseminate output data
Studia interdyscyplinarne. Wyzwania badawcze / Interdisciplinary studies. Research challenges	
<ul style="list-style-type: none"> • Wyzwania badawcze wynikające z rosnących potrzeb użytkowników danych statystycznych i wymagające stosowania rozwiązań z różnych dziedzin nauki • Problematyka wykraczająca poza konwencjonalne tematy związane ze statystyką • Wyniki badań prowadzonych w obrębie różnych dyscyplin z wykorzystaniem metod statystycznych 	<ul style="list-style-type: none"> • Research challenges resulting from growing needs of statistical data users and requiring the application of solutions from various fields of science • Problems beyond the conventional thematic scope related to statistics • Results of research carried out in the framework of several fields of science using statistical methods
Edukacja statystyczna / Statistical education	
<ul style="list-style-type: none"> • Metody i efekty nauczania statystyki na wszystkich poziomach edukacji • Popularyzacja myślenia statystycznego i rzetelnego posługiwania się informacjami statystycznymi 	<ul style="list-style-type: none"> • Methods and effects of statistical education at all levels of education • Popularisation of statistical thinking and of diligent use of statistical information
Spisy powszechno – problemy i wyzwania / Issues and challenges in census taking	
<ul style="list-style-type: none"> • Rozwiązania metodologiczne i organizacyjne możliwe do zastosowania podczas przygotowywania i prowadzenia spisów • Praktyczne aspekty związane z gromadzeniem i udostępnianiem danych ze spisów, w tym dotyczące obciążenia odpowiedzi i ochrony tajemnicy statystycznej 	<ul style="list-style-type: none"> • Methodological and organisational solutions which may be implemented in the process of preparing and conducting censuses • Practical aspects of collecting and disseminating census data, including those related to response burden and the protection of statistical confidentiality
Z dziejów statystyki / From the history of statistics	
<ul style="list-style-type: none"> • Historia prowadzenia obserwacji statystycznych, w tym rozwój metodologii i narzędzi oraz instytucji statystycznych w Polsce i za granicą • Życie i osiągnięcia wybitnych statystyków 	<ul style="list-style-type: none"> • History of statistical observations, including the development of statistical methodologies, tools and institutions in Poland and abroad • Life and achievements of prominent statisticians
In memoriam	
<ul style="list-style-type: none"> • Nekrologi i artykuły wspomnieniowe o osobach zasłużonych dla statystyki 	<ul style="list-style-type: none"> • Obituaries and articles remembering important people in the world of statistics
Dyskusje. Recenzje. Informacje / Discussions. Reviews. Information	
<ul style="list-style-type: none"> • Dyskusje i polemiki • Sprawozdania z konferencji naukowych • Recenzje książek oraz zestawienia nowości wydawniczych GUS 	<ul style="list-style-type: none"> • Discussions and polemics • Reports from scientific conferences • Book reviews and compilations of Statistics Poland's new publications