

Wpływ technologii zależnej od kapitału na pracującego na równowagę uogólnionego modelu Solowa

The influence of technology dependent on capital-labour ratio on the equilibrium of the generalised Solow model

Adam Krawiec^a, Anna Połec^b, Tomasz Tokarski^c

Streszczenie. Celem artykułu jest uogólnienie modelu wzrostu Solowa i pokazanie, że w tak uogólnionym modelu może istnieć więcej niż jeden nietrywialny punkt stacjonarny. W neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego, opierającej się na modelu Solowa-Swana, technologia jest egzogeniczna. Odminnym podejściem charakteryzują się modele wzrostu, w których technologia (lub wiedza) jest kształtowana endogenicznie. Technologia egzogeniczna jest dana z zewnątrz, czyli model nie wyjaśnia, skąd się ona bierze, a endogeniczna występuje wówczas, gdy jej poziom jest zależny od innej zmiennej makroekonomicznej w modelu. W artykule zaproponowano alternatywne uogólnienie modelu Solowa z technologią endogeniczną, która jest związana z wielkością nakładów kapitału na pracującego w ten sposób, że wraz ze wzrostem jej wielkości rośnie poziom technologii. Zbadano również dynamikę modelu oraz wyznaczono punkty stacjonarne i przeanalizowano

^a Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Instytut Ekonomii, Finansów i Zarządzania, Katedra Ekonomii Matematycznej, Polska / Jagiellonian University in Kraków, Faculty of Management and Social Communication, Institute of Economics, Finance and Management, Department of Mathematical Economics, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9885-253X>. Autor korespondencyjny / Corresponding author, e-mail: adam.krawiec@uj.edu.pl.

^b Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Szkoła Doktorska Nauk Społecznych, Polska / Jagiellonian University in Kraków, Doctoral School at the Social Sciences, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1192-086X>. E-mail: ania.polec@doctoral.uj.edu.pl.

^c Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Instytut Ekonomii, Finansów i Zarządzania, Katedra Ekonomii Matematycznej, Polska / Jagiellonian University in Kraków, Faculty of Management and Social Communication, Institute of Economics, Finance and Management, Department of Mathematical Economics, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9551-0892>. E-mail: t.tokarski@uj.edu.pl.

ich stabilność. Przedstawione zostały warunki istnienia stabilnego stanu stacjonarnego. Ponadto przeprowadzono symulacje numeryczne w celu wyznaczenia trajektorii badanych zmiennych makroekonomicznych. Pokazano, że powyżej granicznej stopy oszczędności/inwestycji istnieją dwa nietrywialne punkty stacjonarne. Niestabilny punkt stacjonarny wyznacza granicę ubóstwa. Jeśli gospodarka startuje z poziomu kapitału na pracującego mniejszego od tego punktu, to w długim okresie zmienne makroekonomiczne są zbieżne do 0. Jeśli początkowy zasób kapitału na pracującego jest większy od tego punktu, to zmienne makroekonomiczne są zbieżne do stabilnego punktu stacjonarnego. Co więcej, ponieważ wielkość kapitału na pracującego zasadniczo determinuje zarówno poziom technologii, jak i wydajność pracy, obie zmienne zachowują się identycznie jak ów zasób.

Słowa kluczowe: endogeniczny model wzrostu gospodarczego, technologia, symulacje

Abstract. The aim of this article is to generalise the Solow growth model and to show that, in such a generalised model, there can be more than one non-trivial stationary point. In the neoclassical theory of economic growth, based on the Solow-Swan model, technology is exogenous. Growth models are characterised by a different approach, in which technology (or knowledge) is developed endogenously. Exogenous technology is introduced to the economy 'from the outside', while endogenous technology applies when its level depends on another macroeconomic variable in the model. This paper proposes an alternative generalisation of the Solow model with endogenous technology, which is related to the capital-labour ratio in such a way that the level of technology increases as the value of this variable grows. We also analysed the dynamics of the model, determined the stationary points and analysed their stability. Furthermore, we demonstrated the conditions allowing the existence of a stable stationary state. Numerical simulations were carried out to determine the trajectories of the macroeconomic variables examined in the study. We showed that there are two non-trivial stationary points above the savings rate threshold value. The unstable stationary point defines the poverty limit. If the initial level of capital per worker in an economy is below the value of this point, the macroeconomic variables converge to 0 in the long run. If the initial level of capital per worker is greater than this value, the macroeconomic variables converge to a stable stationary point. Moreover, since in general, the value of the capital-labour ratio determines both the level of technology and labour productivity, these variables behave in the same way as the former.

Keywords: endogenous growth model, technology, simulations

JEL: O41, C62, C63

1. Wprowadzenie

W drugiej połowie lat 50. XX w. Solow (1956) i Swan (1956) – niezależnie od siebie – przedstawili modele wzrostu gospodarczego, które stały się podstawą współczesnej neoklasycznej teorii wzrostu. W modelu Solowa-Swana¹ proces wzrostu gospodarczego jest zdeterminowany przez trzy zmienne: nakłady kapitału rzeczowego, nakłady pracy i technologię. Co więcej, w neoklasycznych modelach wzrostu zarówno nakłady kapitału, jak i nakłady pracy cechują się malejącymi produktywnościami krańcowymi, a technologia ma charakter egzogeniczny, czyli model nie wyjaśnia skąd się ona bierze – Allen (1975) opisał to za pomocą metafory, że technologia spada na gospodarkę jak manna z nieba. Wartość technologii albo jest stała jak w oryginalnym modelu Solowa (1956), albo rośnie wykładniczo ze stałą stopą wzrostu (Solow, 1957; Swan, 1956). Istotnym rozszerzeniem neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego jest zróżnicowanie nakładów czynników produkcji połączone z uwzględnieniem oddziaływania na procesy produkcyjne zasobu kapitału ludzkiego (Mankiw i in., 1992) lub skończonej liczby różnych zasobów kapitałów (Nonneman i Vanhoudt, 1996) przy utrzymaniu założenia o malejącej krańcowej produktywności każdego z badanych czynników produkcji.

Zaletą modelu Solowa – lub bardziej ogólnie: neoklasycznej teorii wzrostu – jest również możliwość wprowadzenia do tego modelu lub modeli rozszerzeń uwzględniających różne aspekty funkcjonowania gospodarki lub społeczeństwa, takie jak równowaga rynku pracy, przestrzenne zróżnicowanie rozwoju gospodarki czy wpływ pandemii lub wojny na gospodarkę (Dykas i in., 2023; Filipowicz, 2019; Filipowicz i in., 2024a, 2024b).

Dyskusja nad założeniem o malejącej krańcowej produktywności czynników produkcji, której prekursorem był Arrow (1962), skupiła się na roli technologii i jej wpływie na wzrost gospodarczy. W drugiej połowie lat 80. i w latach 90. XX w. podjęto istotne próby endogenizacji postępu technicznego (szerzej: wiedzy), co doprowadziło do stworzenia endogenicznej teorii wzrostu gospodarczego (nazywanej także *nową teorią wzrostu*). Za prekursora tej teorii uważa się Romera (1986), który przedstawił pierwszy model wzrostu z endogeniczną wiedzą jako czynnikiem produkcji, charakteryzującą się rosnącą produktywnością krańcową. Z kolei w modelu wzrostu Lucasa (1988), będącym rozwinięciem idei Uzawy (1965), wzrost gospodarczy jest również wynikiem akumulacji kapitału ludzkiego przy założeniu niemalejącej produktywności krańcowej czynników produkcji. Kolejne modele wzrostu wiązały rozwój technologii z nakładami kapitału, pracy oraz wydatkami na badania i rozwój (Aghion i Howitt,

¹ W literaturze makroekonomicznej neoklasyczny model wzrostu gospodarczego Solowa nazywany jest również *modelem wzrostu Solowa-Swana*, dlatego w dalszej części pracy pojęcia modelu Solowa, modelu Solowa-Swana i neoklasycznego modelu wzrostu traktujemy jako tożsame.

1998; Grossman i Helpman, 1991; Romer, 1990). Teoria endogenicznego wzrostu gospodarczego stała się ważnym obszarem współczesnych badań makroekonomicznych dotyczących przyczyn i natury procesów wzrostu gospodarczego (Aghion i Howitt, 1998; Barro i Sala-i-Martin, 1995; Dykas i in., 2023, Filipowicz i in., 2024b; Malaga, 2013; Solow, 2000).

Można jeszcze wspomnieć o rozszerzonych modelach Solowa, które nie charakteryzują się dokładnie jednym nietrywialnym punktem stacjonarnym. Przyjęcie założenia o zmiennej stopie wzrostu liczby pracujących może prowadzić do dwóch nietrywialnych punktów stacjonarnych. Ferrara i Guerrini (2009) założyli, że zmiana liczby pracujących jest opisana funkcją logistyczną, co prowadzi do wystąpienia wielu punktów równowagi, w tym nie tylko stabilnego węzła, lecz także punktów siodłowych. Podobna modyfikacja stopy wzrostu liczby pracujących została zaproponowana przez Filipowicz i in. (2016). W tej pracy stopa wzrostu liczby pracujących jest malejącą funkcją wydajności pracy (postmaltuzjańska ścieżka wzrostu populacji), co prowadzi do zmodyfikowanego modelu Solowa, w którym może istnieć więcej niż jeden punkt stacjonarny lub może nie być żadnego punktu stacjonarnego z wyjątkiem punktu trywialnego. Z kolei przyjęcie niestandardowej ścieżki zmiany stopy liczby pracujących, podobnej do funkcji rozkładu normalnego Gaussa, powoduje, że zmodyfikowane równanie Solowa nie ma nietrywialnego punktu stacjonarnego, a wydajność pracy rośnie do plus nieskończoności (Filipowicz i in., 2017).

Złożona dynamika w zmodyfikowanym modelu Solowa może też być konsekwencją przyjęcia alternatywnej funkcji produkcji. Plata Pérez i Calderón (2009) zbadali zmodyfikowane modele Solowa i Ramseya, w których wprowadzono funkcję wzrostu Richardsa (1959) jako funkcję produkcji, i wykazali istnienie czterech typów punktów równowagi.

W modelu Solowa-Swana nie tylko stopa wzrostu liczby pracujących, lecz także stopa wzrostu technologii jest stała. Jak wskazaliśmy, zmienna stopa liczby pracujących była często rozważana w pracach teoretycznych. W artykule podejmujemy próbę zbadania wpływu zmiennej stopy technologii na dynamikę procesu wzrostu gospodarczego. Przedstawiamy uogólnienie modelu Solowa z technologią endogeniczną, którą kwantyfikujemy jako łączną produktywność czynników produkcji (ang. *total factor productivity* – TFP). W najczęściej rozważanych modyfikacjach stopa wzrostu liczby pracujących osiąga asymptotycznie wartość stałą. Podobne założenie czynimy dla stopy wzrostu technologii. Na skutek stałej dodatniej stopy postępu technicznego (np. w sensie Harroda) technologia rośnie do nieskończoności. Może to prowadzić do osobliwości technologicznej (Ulam, 1958), przy której – jak sądzimy – neoklasyczne modele wzrostu gospodarczego nie będą miały zastosowania. W oryginalnym modelu Solowa (1956) TFP jest stała, więc w tym sensie poziom technologiczny gospodarki okazuje się niezmienny. Swan (1956), konstruując model wzrostu gospodarczego,

przyjął założenie, że ta wielkość rośnie wykładniczo. Można uznać za zasadne występowanie dolnego i górnego ograniczenia dla zmienności TFP. Należy też zauważyć, że TFP jest szeroką miarą i może zawierać wiele różnych czynników, dlatego jej estymacja nie jest łatwa (Deboeck, 2023). Niemniej jednak takie próby są podejmowane i najnowsze badania empiryczne wskazują, że ta wielkość jest addytywna (Philippon, 2022), czyli jej wzrost jest liniowy.

W modelu proponowanym w niniejszym artykule przyjmujemy, że TFP rośnie wraz ze wzrostem nakładów kapitału na pracującego. Przedstawiony model jest uproszczony w tym sensie, że jako czynnik wzrostu TFP zawiera tylko techniczne uzbrojenie pracy, a pomija inne. Jeżeli gospodarka znajduje się daleko od stanu stacjonarnego, to wzrost TFP jest w przybliżeniu liniowy (ale wolniejszy niż liniowy). W miarę jak gospodarka zmierza do stanu stacjonarnego, wzrost TFP jest coraz wolniejszy, aż w punkcie stacjonarnym osiąga poziom 0. Oznacza to, że gdyby nakłady kapitału na pracującego w gospodarce rosły od 0 do nieskończoności, to TFP zwiększałaby się coraz wolniej od 0 do 1. Prezentowany model może być dobrym opisem gospodarki znajdującej się poza stanem długookresowej równowagi.

Badania nad wpływem TFP na wzrost gospodarczy łączą zarówno aspekt teoretyczny, jak i empiryczny (Baier i in., 2006; De Visscher i in., 2020; Heshmati i Rashidghalam, 2016; Welfe, 2003). W tej pracy przedstawiono nowy model teoretyczny. Zbadano również dynamikę tego modelu, istnienie punktu stacjonarnego² i jego stabilność oraz trajektorie, po których podstawowe zmienne makroekonomiczne zmierzają do długookresowej równowagi gospodarki.

Celem artykułu jest uogólnienie modelu wzrostu Solowa i pokazanie, że w tak uogólnionym modelu może istnieć więcej niż jeden nietrywialny punkt stacjonarny. Wskazujemy również, że jeśli istnieją dwa nietrywialne punkty stacjonarne, to pierwszy jest punktem niestabilnym, a drugi – stabilnym. Ponadto niestabilny punkt stacjonarny wyznacza granicę ubóstwa, ponieważ jeśli gospodarka startuje od poziomu kapitału na pracującego niższego od tego punktu, to zarówno kapitał na pracującego, jak i wydajność pracy oraz konsumpcja na pracującego są w długim okresie zbieżne do 0. Jeśli początkowy zasób kapitału na pracującego jest większy od tego punktu, to zmienne makroekonomiczne są zbieżne do stabilnego punktu stacjonarnego.

² Punkt stacjonarny równania różniczkowego danego wzorem $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$, gdzie funkcje $x(t)$ i $f(x)$ są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami $t \geq 0$ i $x \in P$ (przy czym P oznacza przestrzeń fazową powyższego równania różniczkowego), jest definiowany w pracy jako taka wielkość $\bar{x} \in P$, że $f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=\bar{x}} = 0$.

W polskiej literaturze ekonomicznej ten punkt często jest nazywany *stanem ustalonym*, co wynika z mało precyzyjnego tłumaczenia (z punktu widzenia terminologii matematycznej) angielskiego terminu *steady state*. Ponieważ polscy matematycy zajmują się równaniami różniczkowymi znacznie dłużej niż ekonomiści, w artykule konsekwentnie stosujemy terminologię stricte matematyczną i rozważamy punkty stacjonarne (a nie stany ustalone) równania różniczkowego.

2. Założenia modelu

W prowadzonych dalej rozważaniach zakładamy, że funkcjonowanie gospodarki opisują następujące trzy równania³:

$$a(k(t)) = 1 - e^{-k(t)}, \quad (1)$$

$$y(t) = a(k(t))k^\alpha(t), \quad (2)$$

$$\dot{k}(t) = sy(t) - \mu k(t), \quad (3)$$

gdzie:

$a(t) \geq 0$ – technologia w momencie $t \geq 0$ (traktowana jako pojęcie pierwotne, którego kwantyfikacją jest TFP),

$k(t) \geq 0$ – nakłady kapitału na pracującego,

$y(t) \geq 0$ – wydajność pracy (czyli produkcja na pracującego),

$s \in (0, 1)$ – stopa oszczędności/inwestycji,

$\mu > 0$ – stopa ubytku kapitału na pracującego, będąca sumą stopy deprecjacji kapitału $\delta \in (0, 1)$ oraz stopy wzrostu liczby pracujących $n > 0$.

Parametr $\alpha \in (0, 1)$ zostanie zinterpretowany ekonomicznie w dalszej części opracowania.

Związek (1) uzależnia technologię a od zasobu kapitału na pracującego k . Z kolei równanie (2) jest funkcją wydajności pracy wynikającą z funkcji produkcji Cobb-Douglasa (1928) danej wzorem

$$Y = aK^\alpha L^{1-\alpha},$$

gdzie $Y, K, L \geq 0$ oznaczają kolejno wielkość produkcji, nakłady kapitału i nakłady pracy. Natomiast równanie różniczkowe (3) to równanie Solowa, z którego wynika, że przyrost kapitału na pracującego $\dot{k}$ jest różnicą pomiędzy oszczędnościami/inwestycjami na pracującego sy a ubytkiem kapitału na pracującego μk .

³ Zakładamy, że wszystkie dalej badane zmienne są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \geq 0$. Zapis $x(t)$ będzie oznaczał trajektorię zmiennej x (która wyznacza wartości tej zmiennej w kolejnych momentach t), a $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ lub $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ – pochodną owej zmiennej po czasie. Pochodną $\dot{x}(t)$ możemy zaś utożsamiać z przyrostem wartości zmiennej x w momencie t .

3. Rozwiązanie modelu

Z równania (1) wynika, że w prowadzonych analizach technologię a uzależniamy od zasobu kapitału na pracującego k . Funkcja $a(k)$, opisująca zależności między tymi zmiennymi, charakteryzuje się następującymi własnościami⁴:

- $a: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$;
- $a(0) = 0$;
- $\forall k > 0 \quad (a'(k) = e^{-k} > 0 \wedge a''(k) = -e^{-k} < 0)$;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} a(k) = 1$.

Z powyższych własności funkcji $a(k)$ wynika, że jeśli kapitał na pracującego k rośnie od 0 do $+\infty$, to a także rośnie coraz wolniej od 0 do 1. Płyne stąd również wniosek, że w rozważanym modelu – w przeciwieństwie do neoklasycznych modeli wzrostu z egzogenicznym postępem technicznym Solowa (1956), Swana (1956), Mankiwa i in. (1992) czy Nonnemana i Vanhoudta (1996) – technologia nie jest zmienną rosnącą wykładniczo do $+\infty$, ale jej wartości zmieniają się jedynie w przedziale⁵ $[0, 1)$.

Po wstawieniu równania (1) do funkcji wydajności pracy (2) otrzymujemy

$$y = f(k) = (1 - e^{-k})k^\alpha, \quad (4)$$

z czego wynika, że:

- $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$;
- $f(0) = 0$;
- $\forall k > 0 \quad f'(k) = e^{-k}k^\alpha + \alpha(1 - e^{-k})k^{\alpha-1} > 0$;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} ((1 - e^{-k})k^\alpha) = +\infty$,

czyli jeśli nakłady kapitału na pracującego rosną od 0 do $+\infty$, to wydajność pracy rośnie od 0 do $+\infty$.

Ze związku (4) wnioskujemy również, że elastyczność ε wydajności pracy y względem nakładów kapitału na pracującego k opisuje równanie

$$\varepsilon(k) = f'(k) \cdot \frac{k}{f(k)} = \frac{e^{-k}k^{\alpha+1} + \alpha(1 - e^{-k})k^\alpha}{(1 - e^{-k})k^\alpha} = \alpha + \frac{k}{e^k - 1}.$$

⁴ Zapis typu $F: A \rightarrow B$ oznacza, że funkcja F przyporządkowuje wartościom ze zbioru A wartości należące do zbioru B .

⁵ Równanie (1) można zapisać także wzorem $a(k) = a_M \cdot (1 - e^{-k})$, gdzie $a_M > 0$. Wówczas przy nakładach kapitału na pracującego k rosnących od 0 do $+\infty$ technologia a rosnaby od 0 do a_M . Ta zmienna jednak nie jest bezpośrednio mierzalna, więc zawsze można dobrać jednostki, w których jest ona wyrażona w ten sposób, aby $a_M = 1$. Przyjęcie założenia, że $\forall k \geq 0 \quad a(k) \in [0, 1)$, ma tę przewagę nad założeniem, że $a(k) \in [0, a_M)$, ponieważ jeśli w długim okresie $k \rightarrow \bar{k}$, to w pierwszym ze wspomnianych przypadków $a \rightarrow \bar{a} = a(\bar{k}) \in [0, 1)$, a w drugim przypadku mamy $a \rightarrow \bar{a} = a(\bar{k}) \in [0, a_M)$. Dlatego przy $a(k) \in [0, 1)$ wielkość $\bar{a}$ wynosząca np. 0,7 oznacza, że długookresowa technologia osiąga 70% maksymalnej – możliwej do uzyskania – wartości tej zmiennej. Natomiast w przypadku, gdy $a(k) \in [0, a_M)$, długookresowa technologia byłaby równa $0,7a_M$ i należałoby tę wartość odnieść do a_M .

Z powyższej zależności wynika, że:

- z reguły de l'Hôpitala mamy

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \varepsilon(k) = \alpha + \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{k}{e^k - 1} = \alpha + \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^k} = \alpha + 1;$$

- pochodną $\varepsilon'(k)$ opisuje wzór

$$\varepsilon'(k) = \frac{(1-k)e^k - 1}{(e^k - 1)^2},$$

co powoduje, że $\text{sgn } \varepsilon'(k) = \text{sgn } \omega(k)$, gdzie

$$\omega(k) = (1-k)e^k - 1.$$

Funkcja $\omega(k)$ charakteryzuje się następującymi własnościami:

$$\omega(0) = 0 \wedge (\forall k > 0 \quad \omega'(k) = -ke^k < 0).$$

Wynika z tego, że dla każdego $k > 0$ mamy $\omega(k) < 0 \wedge \varepsilon'(k) < 0$;

- wykorzystawszy ponownie regułę de l'Hôpitala, otrzymujemy

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k) = \alpha + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{e^k - 1} = \alpha + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^k} = \alpha.$$

Z powyższych własności funkcji elastyczności $\varepsilon(k)$ wynika, że jeśli zasób kapitału na pracującego k rośnie od 0 do $+\infty$, to elastyczność ε wydajności pracy y względem nakładów kapitału na pracującego k spada od $1 + \alpha$ do α . Dlatego parametr α w funkcji wydajności pracy (4) możemy nazywać quasielastycznością (y względem k) rozumianą w ten sposób, że

$$k \rightarrow +\infty \Rightarrow \varepsilon = f'(k) \cdot \frac{k}{f(k)} \rightarrow \alpha.$$

Funkcję produktywności kapitału $p(k) = \frac{y}{k} = \frac{f(k)}{k}$ określa związek

$$p(k) = (1 - e^{-k})k^{\alpha-1} = \frac{1 - e^{-k}}{k^{1-\alpha}}. \quad (5)$$

Funkcja (5) charakteryzuje się następującymi własnościami:

- badamy ją dla $k > 0$ i wówczas $p: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$;
- jej granice w 0^+ i $+\infty$ równe są 0, ponieważ z reguły de l'Hôpitala wynika, że po pierwsze

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} p(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-k}}{k^{1-\alpha}} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{e^{-k}}{(1-\alpha)k^{-\alpha}} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{e^{-k} k^{\alpha}}{1-\alpha} = 0,$$

a po drugie

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-k}}{k^{1-\alpha}} = 0;$$

- znak pochodnej funkcji produktywności kapitału $p(k) = \frac{f(k)}{k}$ jest taki sam jak pochodnej funkcji

$$q(k) = \ln p(k) = \ln(1 - e^{-k}) - (1-\alpha) \ln k.$$

Pochodną funkcji $q(k)$ określa związek

$$q'(k) = \frac{e^{-k}}{1 - e^{-k}} - \frac{1-\alpha}{k} = \frac{1}{e^k - 1} - \frac{1-\alpha}{k} = \frac{k - (1-\alpha)(e^k - 1)}{k(e^k - 1)}$$

lub

$$q'(k) = \frac{r(k)}{k(e^k - 1)},$$

gdzie $r(k) = k - (1-\alpha)(e^k - 1) \wedge \operatorname{sgn} r(k) = \operatorname{sgn} q'(k)$. Ponieważ $r(0) = 0$, z tego, że $r'(k) = 1 - (1-\alpha)e^k$, wynika, że jeśli k jest mniejsze (większe) od $-\ln(1-\alpha)$, to pochodna $r'(k)$ jest dodatnia (odpowiednio: ujemna), więc w punkcie $k = -\ln(1-\alpha) > 0$ funkcja ma maksimum wynoszące $r_M > 0$. Ponadto $\lim_{k \rightarrow +\infty} r(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (k - (1-\alpha)(e^k - 1)) = -\infty$, zatem (na mocy własności Darboux funkcji ciągłej) istnieje dokładnie jeden punkt k^* większy od $-\ln(1-\alpha) > 0$, taki że w przedziale $(0, k^*)$ wartości funkcji $r(k)$ i pochodnej $q'(k)$ są dodatnie, a w przedziale $(k^*, +\infty)$ – ujemne.

Z powyższych własności funkcji produktywności kapitału $p(k)$ wynika również, że w przedziale $(0, k^*)$ wartości tej funkcji rosną od 0 do $p_M = p(k^*) > 0$, a w przedziale $(0, k^*)$ – spadają.

Wielkość k^* , przy której produktywność kapitału jest maksymalna, to rozwiązanie równania $u(k) = 0$, gdzie $u(k) = k - (1-\alpha)(e^k - 1)$. Wynika z tego, że k^* jest funkcją uwikłaną quasielastyczności α postaci $k^* = k^*(\alpha)$. Pochodną tej funkcji określa

związek $\frac{dk^*}{d\alpha} = -\frac{\partial u/\partial \alpha}{\partial u/\partial k} = \frac{e^k - 1}{(1-\alpha)e^k - 1}$. Pochodna $\frac{dk^*}{d\alpha}$ jest dodatnia, ponieważ po pierwsze $\forall k > 0$ ($e^k > 1 \Rightarrow e^k - 1 > 0$), a po drugie punkt k^* znajduje się na prawo od punktu $k = -\ln(1-\alpha) = \ln \frac{1}{1-\alpha}$, co powoduje, że w jego otoczeniu $k > \ln \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow e^k > \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow (1-\alpha)e^k - 1 > 0$.

Wybrane przybliżone wartości k^* (przy różnych quasielastycznościach α) oraz odpowiadające im produktywności kapitału $p(k^*)$ zestawiono w tabl. 1.

Tabl. 1. Przybliżenia k^* i $p_M = p(k^*)$ odpowiadające wybranym quasielastycznościom α

α	k^*	$p_M = p(k^*)$
0,05	0,1017	0,8481
0,10	0,2071	0,7717
0,15	0,3167	0,7213
0,20	0,4308	0,6865
0,25	0,5502	0,6624
0,30	0,6755	0,6463
$\frac{1}{3}$	0,7627	0,6392
0,35	0,8075	0,6366
0,40	0,9474	0,6324
0,45	1,0965	0,6331
0,50	1,2564	0,6382
0,55	1,4295	0,6476
0,60	1,6188	0,6613
$\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$	1,7457	0,6720
0,65	1,8284	0,6795
$\frac{2}{3}$	1,9038	0,6866
$\frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0,6826$	1,9789	0,6939
0,70	2,0646	0,7025
0,75	2,3367	0,7306
$\frac{\ln 3}{\ln 4} \approx 0,7925$	2,6075	0,7592
0,80	2,6604	0,7648
0,85	3,0649	0,8059
0,90	3,6150	0,8557
0,95	4,5139	0,9173

Źródło: obliczenia własne.

4. Stabilność punktów stacjonarnych

Po wstawieniu funkcji wydajności pracy (4) do równania różniczkowego (3) otrzymujemy uogólnienie równania Solowa dane wzorem

$$\dot{k}(t) = s(1 - e^{-k(t)})k^\alpha(t) - \mu k(t). \quad (6)$$

Równanie różniczkowe (6) nie ma całki ani w zbiorze funkcji elementarnych lub ich złożen – z wyjątkiem całki trywialnej $k(t) = 0$, ani wśród funkcji specjalnych Gaussa i Eulera. Ponadto, po uwzględnieniu funkcji wydajności pracy (4), możemy je zapisać wzorem

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - \mu k(t),$$

z którego wynika, że

$$\left(\dot{k} > 0 \Leftrightarrow p(k) > \frac{\mu}{s}\right) \wedge \left(\dot{k} = 0 \Leftrightarrow p(k) = \frac{\mu}{s}\right) \wedge \left(\dot{k} < 0 \Leftrightarrow p(k) < \frac{\mu}{s}\right), \quad (7)$$

gdzie $p(k)$ oznacza badaną uprzednio funkcję produktywności kapitału (5). Podobnie jak w oryginalnym modelu Solowa zależność (7) implikuje, że jeśli produktywność kapitału $p(k)$ będzie większa (mniejsza) od ilorazu $\frac{\mu}{s}$, to przyrosty kapitału na pracującego $\dot{k}$ będą dodatnie (ujemne), a przy $p(k) = \frac{\mu}{s}$ równanie różniczkowe (6) będzie miało nietrywialny punkt stacjonarny.

Ze związku (7) i własności funkcji produktywności kapitału wynika, że liczba nietrywialnych punktów stacjonarnych równania różniczkowego (7) jest zależna od relacji, jaka kształtuje się pomiędzy maksymalną (możliwą do osiągnięcia) produktywnością kapitału p_M a ilorazem $\frac{\mu}{s}$. Wynika to z tego, że:

- jeśli $p_M < \frac{\mu}{s}$, to badane równanie różniczkowe nie ma nietrywialnych punktów stacjonarnych, ponieważ wówczas dla dowolnego $k > 0$ mamy $p(k) \leq p_M < \frac{\mu}{s}$;
- w przypadku, gdy $p_M = \frac{\mu}{s}$, równanie ma nietrywialny punkt stacjonarny $\bar{k}$ pokrywający się z punktem k^* , w którym funkcja produktywności kapitału osiąga maksimum;
- jeśli zaś $p_M > \frac{\mu}{s}$, to z własności Darboux funkcji ciągłej wynika, że istnieją dwa nietrywialne punkty stacjonarne równania różniczkowego (6). Pierwszy z tych punktów ($\bar{k}_1$) należy do przedziału $(0, k^*)$, a drugi ($\bar{k}_2$) znajduje się w przedziale $(k^*, +\infty)$.

W pierwszym z wymienionych wyżej przypadków – czyli gdy $p_M < \frac{\mu}{s}$ – przy dowolnej dodatniej wartości kapitału na pracującego przyrosty tego kapitału są ujemne. Dlatego dla dowolnej wyjściowej wartości $k(0) > 0$ otrzymujemy⁶

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow (k(t) \rightarrow 0 \wedge y(t) \rightarrow 0 \wedge a(t) \rightarrow 0),$$

czyli kapitał na pracującego k , wydajność pracy y i technologia są w długim okresie zbieżne do 0.

⁶ Wartość zmiennej x , która kształtuje się przy $t \rightarrow +\infty$, jest utożsamiana z jej wartością długookresową.

Jeśli zaś $p_M = \frac{\mu}{s}$, to po pierwsze w punkcie $\bar{k} = k^*$ mamy $\dot{k} = 0$, a po drugie dla dowolnych $k \in (0, \bar{k}) \cup (\bar{k}, +\infty)$ przyrosty kapitału na pracującego są ujemne. W związku z tym:

- jeśli wyjściowy zasób kapitału na pracującego $k(0) \in (0, \bar{k})$, to

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow (k(t) \rightarrow 0 \wedge y(t) \rightarrow 0 \wedge a(t) \rightarrow 0),$$

więc mamy równowagę długookresową jak poprzednio;

- przy $k(0) = \bar{k}$ w każdym momencie $t > 0$ kapitał na pracującego jest równy $\bar{k}$, więc otrzymujemy⁷

$$\forall t \geq 0 \quad y(t) = f(\bar{k}) \wedge a(t) = a(\bar{k});$$

- w przypadku, gdy $k(0) \in (\bar{k}, +\infty)$, mamy $\dot{k}(t) < 0 \wedge k(t) > 0$, a z tego wynika, że

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow (k(t) \rightarrow \bar{k} \wedge y(t) \rightarrow f(\bar{k}) \wedge a(t) \rightarrow a(\bar{k})).$$

Analizując równanie różniczkowe (6) przy $p_M > \frac{\mu}{s}$, stwierdzamy, że

$$k \in (0, \bar{k}_1) \cup (\bar{k}_2, +\infty) \Rightarrow \dot{k} < 0,$$

$$(k = \bar{k}_1 \vee k = \bar{k}_2) \Rightarrow \dot{k} = 0$$

oraz

$$k \in (\bar{k}_1, \bar{k}_2) \Rightarrow \dot{k} > 0.$$

Wynikają z tego następujące wnioski:

- jeśli wyjściowy kapitał na pracującego $k(0)$ należy do przedziału $(0, \bar{k}_1)$, to

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow (k(t) \rightarrow 0 \wedge y(t) \rightarrow 0 \wedge a(t) \rightarrow 0);$$

- w przypadku, gdy $k(0) = \bar{k}_1$ również w każdym następnym momencie t , wartości rozważanego tu zasobu, czyli $k(t)$, wynoszą $\bar{k}_1$, co powoduje, że wówczas

$$\forall t \geq 0 \quad y(t) = f(\bar{k}_1) \wedge a(t) = a(\bar{k}_1);$$

⁷ Rzecz jasna, skoro $f'(k) > 0$ i $a'(k) > 0$, to długookresowe wartości $f(\bar{k})$, $f(\bar{k}_1)$, $f(\bar{k}_2)$, $a(\bar{k})$, $a(\bar{k}_1)$ i $a(\bar{k}_2)$ będą tym wyższe, im wyższe będą wartości odpowiednio $\bar{k}$, $\bar{k}_1$ i $\bar{k}_2$.

- jeśli $k(0) \in (\bar{k}_1, \bar{k}_2)$, to $\dot{k} > 0$, stąd wnioskujemy, że

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow (k(t) \rightarrow \bar{k}_2 \wedge y(t) \rightarrow f(\bar{k}_2) \wedge a(t) \rightarrow a(\bar{k}_2));$$

- przy $k(0) = \bar{k}_2$ mamy $\dot{k} = 0$, zatem

$$\forall t \geq 0 \quad k(t) = \bar{k}_2 \wedge y(t) = f(\bar{k}_2) \wedge a(t) = a(\bar{k}_2);$$

- przy $k(0) \in (\bar{k}_2, +\infty)$ przyrosty kapitału na pracującego są ponownie ujemne, a z tego wynika, że

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow (k(t) \rightarrow \bar{k}_2 \wedge y(t) \rightarrow f(\bar{k}_2) \wedge a(t) \rightarrow a(\bar{k}_2));$$

- zauważmy też, że punkty stacjonarne $\bar{k}_1$ i $\bar{k}_2$ są rozwiązaniami równania

$$v(k) = 0,$$

gdzie

$$v(k) = p(k) - \frac{\mu}{s},$$

przy czym punkt $\bar{k}_1$ jest rozwiązaniem owego równania w przedziale, w którym pochodna $p'(k)$ jest dodatnia, a punkt $\bar{k}_2$ – w przedziale, w którym jest ona ujemna. Dlatego

$$\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \mu} = - \frac{\partial v / \partial \mu}{\partial v / \partial k} = \frac{1}{sp'(k)} > 0 \wedge \frac{\partial \bar{k}_1}{\partial s} = - \frac{\partial v / \partial s}{\partial v / \partial k} = - \frac{\mu}{s^2 p'(k)} < 0$$

oraz

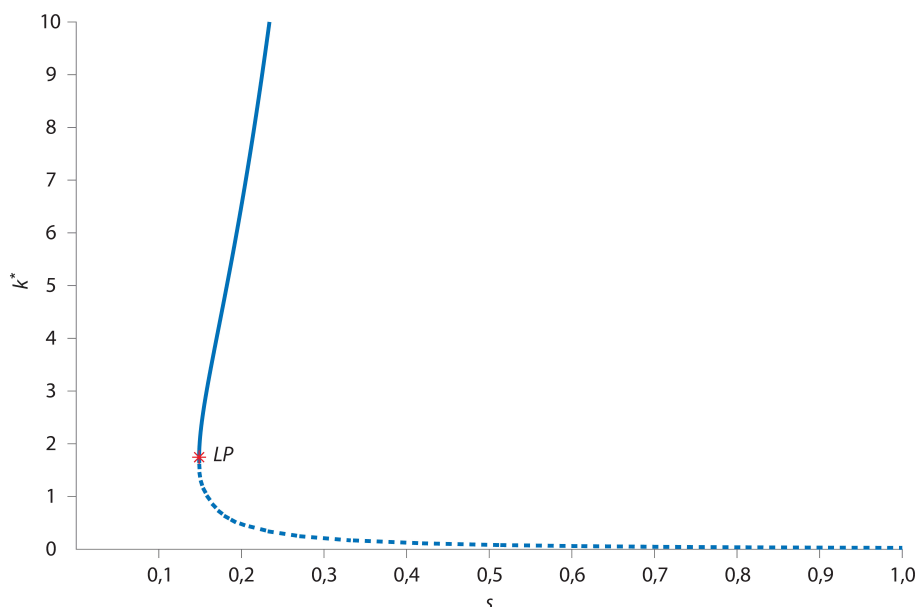
$$\frac{\partial \bar{k}_2}{\partial \mu} = - \frac{\partial v / \partial \mu}{\partial v / \partial k} = \frac{1}{sp'(k)} < 0 \wedge \frac{\partial \bar{k}_2}{\partial s} = - \frac{\partial v / \partial s}{\partial v / \partial k} = - \frac{\mu}{s^2 p'(k)} > 0.$$

Oznacza to, że im wyższa stopa ubytku kapitału na pracującego μ , tym wyższa wartość $\bar{k}_1$, niższa $\bar{k}_2$ i tym samym mniejsza rozpiętość przedziału $(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$, w którym $\dot{k} > 0$. Jeśli zaś rośnie stopa oszczędności/inwestycji s , to zasób $\bar{k}_1$ spada, zasób $\bar{k}_2$ rośnie, a rozpiętość przedziału $(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ się zwiększa.

Na wyk. 1 został przedstawiony diagram bifurkacyjny (Dhooge i in., 2003) dla modelu (6). Przy wartościach parametrów $\mu = 0,1$ i $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ bifurkacja typu siodło-węzeł

zachodzi dla $s = 0,1488$. Dla wartości s mniejszych niż $0,1488$ nie istnieje żaden punkt stacjonarny oprócz trywialnego punktu stacjonarnego. Gdy s jest większe niż $0,1488$, pojawiają się dwa punkty stacjonarne; stabilne leżą na linii ciągłej, a niestabilne – na przerywanej.

Wykr. 1. Diagram bifurkacyjny dla punktów stacjonarnych k^* modelu (6) względem stopy oszczędności/inwestycji (s)



Uwaga. Linia ciągła – punkty stabilne, linia przerywana – punkty niestabilne, LP – punkt bifurkacyjny typu siodło-węzeł.

Źródło: obliczenia własne.

Porównajmy również wartości funkcji produktywności kapitału $p(k)$, opisanej równaniem (5), z wartościami funkcji produktywności kapitału $p_S(k)$, która występuje w modelu Solowa, z funkcją produkcji Cobb-Douglasa o łącznej produktywności czynników produkcji $\alpha = 1$, czyli z funkcją produktywności kapitału daną wzorem: $p_S(k) = k^{\alpha-1}$. Przy ilorazach badanych produktywności kapitału $\rho(k) = \frac{p_S(k)}{p(k)}$ otrzymujemy⁸

$$\rho(k) = \frac{k^{\alpha-1}}{(1-e^{-k})k^{\alpha-1}},$$

⁸ Ilorazy wydajności pracy w modelu Solowa $f_S(k) = k^\alpha$ i w badanym tu modelu $f(k) = (1-e^{-k})k^\alpha$ także są równe rozważanym tu wartościom funkcji $\rho(k)$.

a stąd

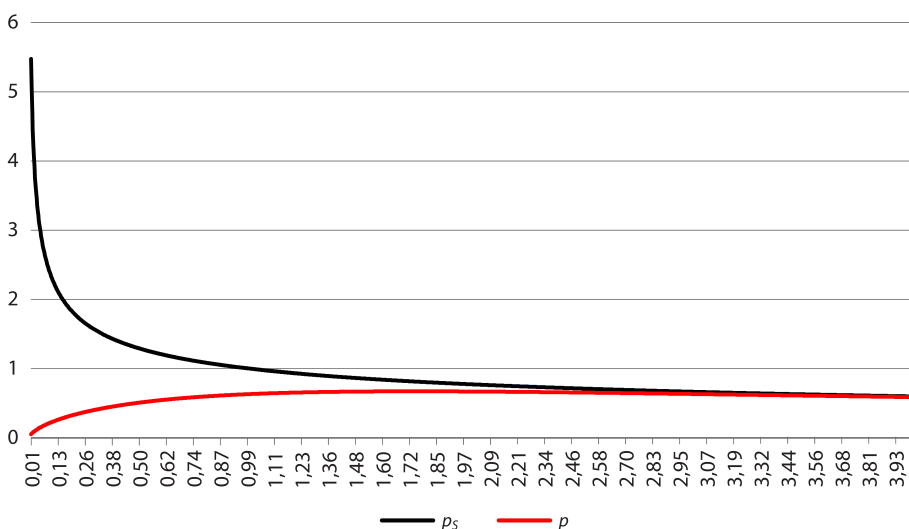
$$\rho(k) = \frac{e^k}{e^k - 1}. \quad (8)$$

Ze związku (8) wynika, że:

- $k \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(k) \rightarrow +\infty$;
- $\forall k > 0 \left(\rho'(k) = -\frac{e^k}{(e^k - 1)^2} < 0 \wedge \rho''(k) = -\frac{e^k(e^k - 1) - 2e^{2k}}{(e^k - 1)^3} = \frac{e^k(e^k + 1)}{(e^k - 1)^3} > 0 \right)$;
- $k \rightarrow +\infty \Rightarrow \rho(k) \rightarrow 1$.

Jeśli więc nakłady kapitału na pracującego k rosną od 0 do $+\infty$, to ilorazy $\rho(k)$ produktywności kapitału spadają coraz wolniej od $+\infty$ do 1. Przykładowe krzywe produktywności kapitału w modelu Solowa i w badanym modelu zilustrowano na wykr. 2, przy wartości parametru $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$, a ich kształt dla dowolnego $\alpha \in (0, 1)$ jest bardzo zbliżony do zaprezentowanego.

Wykr. 2. Krzywe produktywności kapitału w modelu Solowa (p_S) i analizowanym modelu (p) przy $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$



Źródło: obliczenia własne.

Z własności funkcji $\rho(k)$ i wykr. 2 można wyciągnąć wniosek, że jeśli badany model ma dwa nietrywialne punkty stacjonarne (czyli gdy $p_M > \frac{\mu}{s}$), to punkt stacjonarny $\bar{k}_2 < \bar{k}_S$, gdzie $\bar{k}_S = \left(\frac{s}{\mu}\right)^{1/(1-\alpha)}$ oznacza długookresowy kapitał na pracującego w równowadze modelu Solowa z funkcją produkcji Cobba-Douglasa o $\alpha = 1$.

Co więcej, zarówno w punkcie $\bar{k}_2$ w analizowanym modelu, jak i w punkcie długo-okresowej równowagi Solowa $\bar{k}_S$ musi zachodzić równość $p(k) = \frac{\mu}{s}$, więc jeśli stopa oszczędności/inwestycji s rośnie, to po pierwsze punkty stacjonarne $\bar{k}_2$ i $\bar{k}_S$ przesuwają się w prawo, a po drugie iloraz $\frac{\bar{k}_S}{\bar{k}_2}$ zbliża się do 1.

Prowadzone rozważania teoretyczne zilustrujemy prostym przykładem liczbowym. Załóżmy, że stopa ubytku kapitału na pracującego μ wynosi 10%. Przyjmujemy, że wartości parametru α wynoszą kolejno $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$, $\frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0,6826$ lub $\frac{\ln 3}{\ln 4} \approx 0,7925$. Bierzemy α , będące ilorazami $\frac{\ln A}{\ln B}$ (przy czym $A, B > 0$), z tego względu, że gdyby w gospodarce proces produkcyjny opisywała funkcja produkcji Cobb-Douglasa o TFP równej 1, czyli funkcja $Y = K^\alpha L^{1-\alpha} \Rightarrow y = k^\alpha$, i gdyby stosunek kapitału na pracującego $\frac{k_I}{k_{II}}$ w dwóch gospodarkach wynosił B , to relację wydajności pracy $\frac{y_I}{y_{II}}$ w tych gospodarkach określałoby równanie⁹ $\frac{y_I}{y_{II}} = \left(\frac{k_I}{k_{II}}\right)^{\ln A / \ln B} = B^{\ln A / \ln B} = A$. Oznacza to, że w tych warunkach $\left(\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3} \wedge \frac{k_I}{k_{II}} = 3\right) \Rightarrow \frac{y_I}{y_{II}} = 2$, $\left(\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 5} \wedge \frac{k_I}{k_{II}} = 5\right) \Rightarrow \frac{y_I}{y_{II}} = 3$ oraz $\left(\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 4} \wedge \frac{k_I}{k_{II}} = 4\right) \Rightarrow \frac{y_I}{y_{II}} = 3$.

Z oszacowań w tabl. 1 wynika, że przy wartości parametru $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ zasób k^* jest równy ok. 1,7457, a $p_M = p(k^*) \approx 0,6720$, jeśli $\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 5}$, to $k^* \approx 1,9789 \wedge p_M = p(k^*) \approx 0,6939$. W przypadku $\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 4}$ otrzymujemy $k^* \approx 2,6075 \wedge p_M = p(k^*) \approx 0,7592$. Przy tych wartościach parametrów α i μ dochodzimy do następujących wniosków:

- jeśli stopa oszczędności/inwestycji w gospodarce będzie niższa od $s^* = \frac{\mu}{p_M} = \frac{1}{10p_M}$, to w długim okresie $k(t), y(t), a(t) \rightarrow 0$. W badanych przypadkach wartości s^* są równe ok. 14,88% przy $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, ok. 14,41%, jeśli $\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 5}$ oraz ok. 13,17% dla $\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 4}$;
- w przypadku, gdy stopa oszczędności/inwestycji s równa jest s^* (odpowiadającemu zadanym wartościom quasielastyczności α), to $(k(0) < \bar{k} = k^* \wedge t \rightarrow +\infty) \Rightarrow k(t), y(t), a(t) \rightarrow 0$, $k(0) = \bar{k} = k^* \Rightarrow \forall t > 0 \left(k(t) = \bar{k} \wedge y(t) = f(\bar{k}) \wedge a(t) = a(\bar{k}) \right)$ lub $(k(0) > \bar{k} = k^* \wedge t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (k(t) \rightarrow \bar{k} \wedge y(t) \rightarrow f(\bar{k}) \wedge a(t) \rightarrow a(\bar{k}))$.

Wartości $\bar{k}$, $f(\bar{k})$ i $a(\bar{k})$, towarzyszące badanym wartościom quasielastyczności, przedstawiono w tabl. 2.

⁹ Rzecz jasna przy funkcji wydajności pracy (4) implikacja $\left(\alpha = \frac{\ln A}{\ln B} \wedge \frac{k_I}{k_{II}} = B\right) \Rightarrow \frac{y_I}{y_{II}} = A$ nie zachodzi, ponieważ wówczas mamy $\left(\alpha = \frac{\ln A}{\ln B} \wedge \frac{k_I}{k_{II}} = B\right) \Rightarrow \frac{y_I}{y_{II}} = \frac{1 - e^{-Bk_{II}}}{1 - e^{-k_{II}}} A$.

Tabl. 2. Wartości $\bar{k}$, $f(\bar{k})$ i $a(\bar{k})$ odpowiadające wybranym quasielastycznościom α

α	$\bar{k} = k^*$	$f(\bar{k})$	$a(\bar{k})$
$\frac{\ln 2}{\ln 3}$	1,7457	1,1732	0,8255
$\frac{\ln 3}{\ln 5}$	1,9789	1,3732	0,8618
$\frac{\ln 3}{\ln 4}$	2,6075	1,9797	0,9263

Źródło: obliczenia własne.

- jeśli zaś $s > s^*$, to przy $k(0) > 0$ może wystąpić jeden z następujących pięciu przypadków:

$$(k(0) \in (0, \bar{k}_1) \wedge t \rightarrow +\infty) \Rightarrow k(t), y(t), a(t) \rightarrow 0,$$

$$k(0) = \bar{k}_1 \Rightarrow \forall t > 0 \left(k(t) = \bar{k}_1 \wedge y(t) = f(\bar{k}_1) \wedge a(t) = a(\bar{k}_1) \right),$$

$$(k(0) \in (\bar{k}_1, \bar{k}_2) \wedge t \rightarrow +\infty) \Rightarrow \left(k(t) \rightarrow (\bar{k}_2)^- \wedge y(t) \rightarrow \left(f(\bar{k}_2) \right)^- \wedge a(t) \rightarrow \left(a(\bar{k}_2) \right)^- \right),$$

$$k(0) = \bar{k}_2 \Rightarrow \forall t > 0 \left(k(t) = \bar{k}_2 \wedge y(t) = f(\bar{k}_2) \wedge a(t) = a(\bar{k}_2) \right)$$

lub

$$(k(0) > \bar{k}_2 \wedge t \rightarrow +\infty) \Rightarrow \left(k(t) \rightarrow (\bar{k}_2)^+ \wedge y(t) \rightarrow \left(f(\bar{k}_2) \right)^+ \wedge a(t) \rightarrow \left(a(\bar{k}_2) \right)^+ \right).$$

Wartości $\bar{k}_1$, $f(\bar{k}_1)$, $a(\bar{k}_1)$, $\bar{k}_2$, $f(\bar{k}_2)$ i $a(\bar{k}_2)$, opisujące stany stabilnej lub niestabilnej równowagi długookresowej tak zmodyfikowanego modelu wzrostu Solowa, przy badanych wartościach quasielastyczności α oraz stopie oszczędności/inwestycji s równej (kolejno) 15%, 17,5%, 20%, 22,5%, 25% $> s^*$, zestawiono w tabl. 3. Podano również wartości kapitału na pracującego $\bar{k}_s$ i wydajności pracy $\bar{y}_s = (\bar{k}_s)^\alpha$ w długookresowej równowadze Solowa przy badanych kombinacjach (α, s, μ) , równe $\bar{k}_s = \left(\frac{s}{\mu}\right)^{1/(1-\alpha)}$ i $\bar{y}_s = \left(\frac{s}{\mu}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$.

Tabl. 3. Wartości $\bar{k}_1, f(\bar{k}_1), a(\bar{k}_1), \bar{k}_2, f(\bar{k}_2), a(\bar{k}_2)$ oraz $\bar{k}_s$ i $\bar{y}_s$ przy wybranych kombinacjach parametrów (α, s)

s	$\bar{k}_1$	$f(\bar{k}_1)$	$a(\bar{k}_1)$	$\bar{k}_2$	$f(\bar{k}_2)$	$a(\bar{k}_2)$	$\bar{k}_s$	$\bar{y}_s$
$\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$								
0,150	1,4312	0,9541	0,7610	2,1271	1,4181	0,8808	3 ^a	2 ^a
0,175	0,6894	0,3939	0,4981	4,4062	2,5178	0,9878	4,5553	2,6030
0,200	0,4804	0,2402	0,3815	6,5148	3,2574	0,9985	6,5410	3,2705
0,225	0,3665	0,1629	0,3068	8,9970	3,9987	0,9999	9 ^a	4 ^a
0,250	0,2937	0,1175	0,2545	11,9733	4,7893	1,0000	11,9736	4,7894
$\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 5}$								
0,150	1,2704	0,8469	0,7193	3,1049	2,0699	0,9552	3,5876	2,3917
0,175	0,7262	0,4150	0,5163	5,7739	3,2994	0,9969	5,8308	3,3319
0,200	0,5223	0,2611	0,4068	8,8767	4,4384	0,9999	8,8806	4,4403
0,225	0,4064	0,1806	0,3340	12,8708	5,7203	1,0000	12,8709	5,7204
0,250	0,3306	0,1322	0,2815	17,9380	7,1752	1,0000	17,9380	7,1752
$\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 4}$								
0,150	1,1653	0,7769	0,6882	7,0258	4,6839	0,9991	7,0560	4,7040
0,175	0,7836	0,4478	0,5432	14,8307	8,4747	1,0000	14,8307	8,4747
0,200	0,5962	0,2981	0,4491	28,2238	14,1119	1,0000	28,2238	14,1119
0,225	0,4810	0,2138	0,3818	49,7865	22,1273	1,0000	49,7865	22,1273
0,250	0,4021	0,1608	0,3311	82,7199	33,0880	1,0000	82,7199	33,0880

a W tych przypadkach uzyskano wielkości będące liczbami naturalnymi.

Uwaga. Szarym tłem zaznaczono wielkości z oryginalnego modelu Solowa. Wielkości w tabl. 3 podawane są z dokładnością do 4 cyfr po przecinku, dlatego zapis 1,0000 oznacza liczbę bardzo zbliżoną do 1.

Źródło: obliczenia własne.

Aby zilustrować przykładowe trajektorie kapitału na pracującego, technologii i wydajności pracy w czasie dyskretnym, zastępujemy układ równań (1)–(3) następującym układem dynamicznym (dla $t = 0, 1, \dots$):

$$\begin{cases} a_t = 1 - e^{-k_t} \\ y_t = a_t k_t^\alpha \\ k_t = s y_{t-1} + (1 - \mu) k_{t-1} \end{cases} \quad (9)$$

Przy $t \rightarrow +\infty$ układ (9) zmierza do tego samego punktu stacjonarnego co model teoretyczny (1)–(3), zatem w otoczeniu tego punktu rozwiązania są równoważne.

Korzystając z układu dynamicznego (9), wyznaczamy trajektorie wspomnianych zmiennych makroekonomicznych w trzech hipotetycznych gospodarkach: A, B i C. W symulacjach numerycznych bierzemy quasielastyczność¹⁰ $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ i stopę ubytku kapitału na pracującego $\mu = 0,1$. Jeśli zaś $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, to maksymalna produktywność kapitału p_M występuje przy $k^* \approx 1,7457$ i wynosi ok. 0,6720. Na wykresach 3–5 zilustrowano te trajektorie, przy założeniu że w każdej gospodarce stopa oszczędności/inwestycji s wynosi odpowiednio 0,12, $s = \frac{\mu}{p_M} \approx 0,1488$ i 0,16. Wówczas

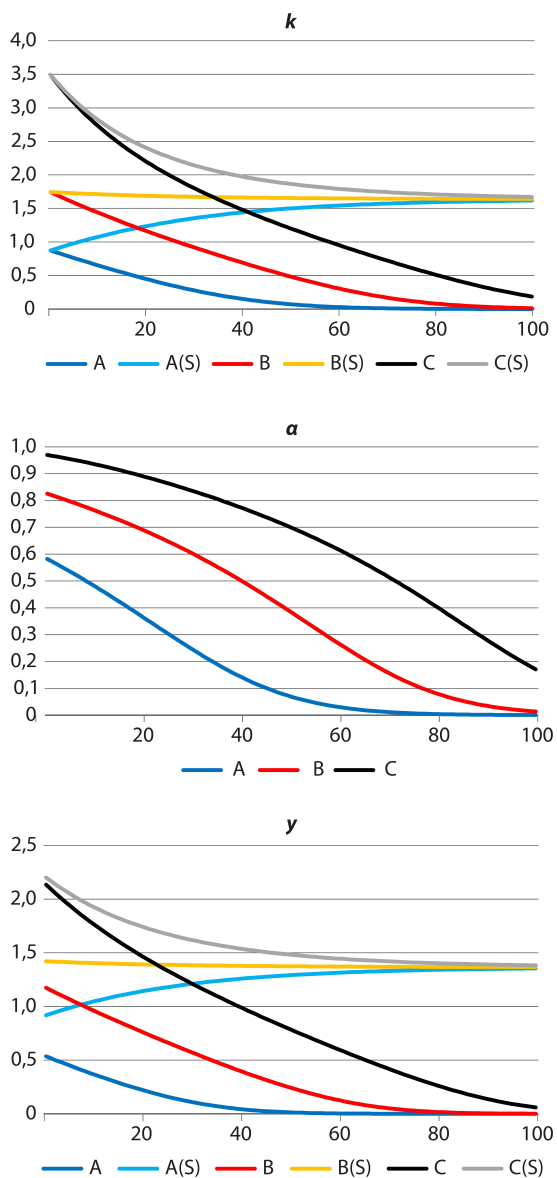
$$\left(s = 0,12 \Rightarrow p_M < \frac{\mu}{s}\right) \wedge \left(s = 0,16 \Rightarrow p_M > \frac{\mu}{s}\right).$$

Ponadto w każdym z badanych przypadków założyliśmy, że w gospodarce A wyjściowy kapitał na pracującego $k_0 > 0$ wynosi $\frac{k^*}{2}$, w gospodarce B wynosi $k_0 = k^*$, a w C wynosi $k_0 = 2k^*$. Wówczas (przy badanej quasielastyczności α) wyjściowy zasób kapitału na pracującego w gospodarce A jest niższy od $\bar{k}_1$, w B spełniona jest nierówność $\bar{k}_1 < k_0 < \bar{k}_2$, a w gospodarce C jest to $k_0 > \bar{k}_2$.

Ponadto na wykresach 3–5 zilustrowano trajektorie kapitału na pracującego k i wydajności pracy y w gospodarkach A, B i C w analogicznym modelu Solowa (pominięto trajektorie technologii a , ponieważ w tym modelu w każdym okresie t $a_t = 1$). Trajektorie wspomnianych zmiennych w modelu Solowa są oznaczone odpowiednio jako A(S), B(S) i C(S).

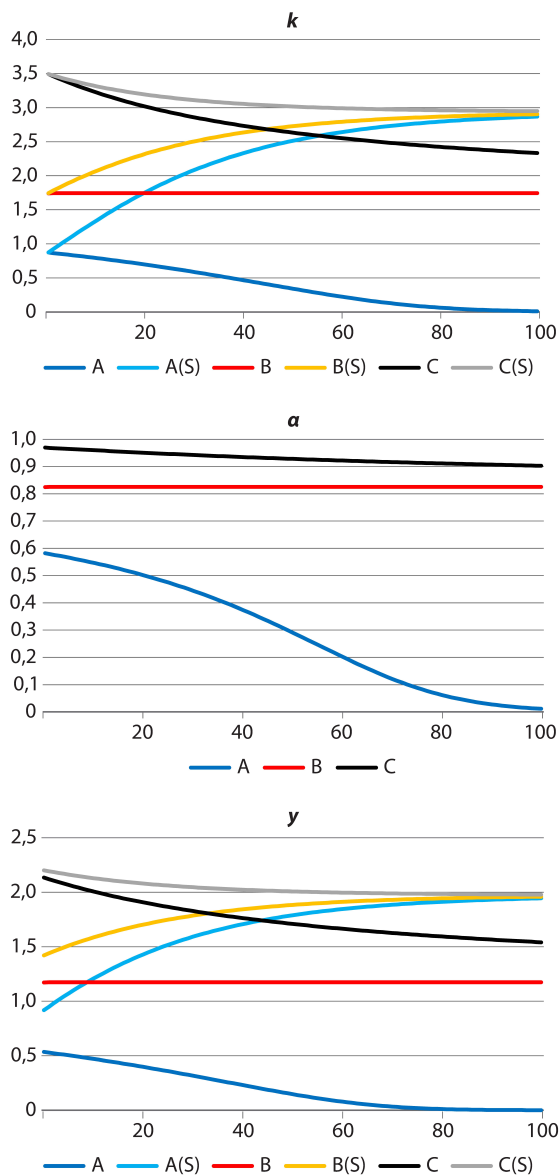
¹⁰ Prezentowane symulacje numeryczne mają jedynie zilustrować wnioski płynące z prowadzonych wcześniej analiz teoretycznych, dlatego wybór quasielastyczności $\alpha \in (0, 1)$ nie rzutuje na kształt otrzymanych trajektorii, a wpływa jedynie na ich położenie. Bierzemy zatem *ad hoc* $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. W znanych z literatury szacunkach i kalibracjach parametrów funkcji produkcji Cobba-Douglasa dla różnych gospodarek (np. Dykas i in., 2023; Filipowicz, 2019; Filipowicz i in., 2017; Florczak i in., 2013; Kliber i Malaga, 2003; Matsumoto i Szidarovszky, 2025; Vollrath, 2024; Wisła i Nowosad, 2020) te elastyczności wahają się między 0,19 a $\frac{\ln 3}{\ln 5}$, co sugeruje, że trudno o precyzyjne, uniwersalne wyznaczenie wartości tego parametru. Szeroką dyskusję dotyczącą kalibracji lub estymacji elastyczności produkcji względem kapitału na pracującego a można znaleźć w pracy Welfego (2003).

Wykr. 3. Trajektorie kapitału na pracującego k , technologii a i wydajności pracy y przy $s = 0,12$



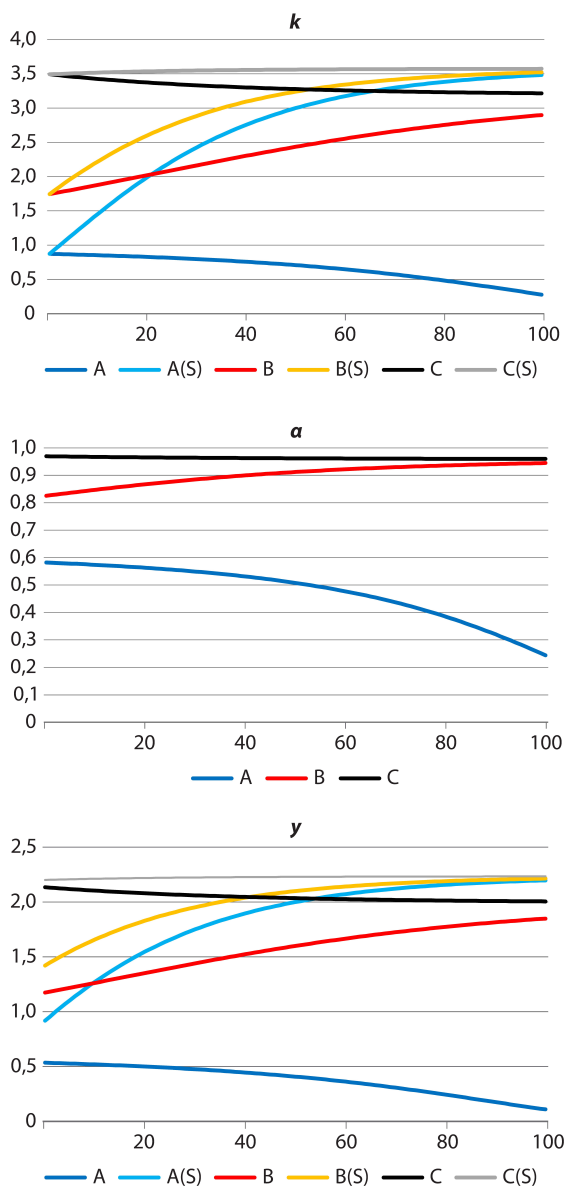
Źródło: obliczenia własne.

Wykr. 4. Trajektorie kapitału na pracującego k , technologii α i wydajności pracy y przy $s = \frac{\mu}{\rho_M}$



Źródło: obliczenia własne.

Wykr. 5. Trajektorie kapitału na pracującego k , technologii α i wydajności pracy y przy $s = 0,16$



Źródło: obliczenia własne.

Trajektorie przedstawione na wykresach 3–5 potwierdzają sformułowane wcześniej wnioski płynące z analiz stricte teoretycznych, ponieważ przy stopach oszczędności/inwestycji poniżej wyznaczonej uprzednio wielkości granicznej kapitał na pracującego, technologia i wydajność pracy zmierzają do 0, powyżej zaś – do nietrywialnego punktu stacjonarnego. Jeśli we wspomnianym okresie kapitał na pracującego wynosi $k_0 > 0$, to odpowiadający mu poziom produkcji na pracującego y_0 w modelu Solowa jest równy k_0^α , a w prezentowanym modelu

$$y_0 = (1 - e^{-k_0})k_0^\alpha < k_0^\alpha,$$

czyli w każdej badanej gospodarce poziom wydajności pracy w modelu Solowa w okresie $t = 0$ jest wyższy niż w badanym modelu wzrostu gospodarczego.

5. Podsumowanie

W pracy został przedstawiony model wzrostu, w którym zakłada się, że akumulacja kapitału na pracującego prowadzi do wzrostu poziomu technologii. Ten model może mieć więcej niż jeden nietrywialny punkt stacjonarny, przy czym jeśli istnieją dwa nietrywialne punkty stacjonarne, to pierwszy z nich wyznacza granicę ubóstwa gospodarki. Jeśli gospodarka znajdzie się w przedziale między 0 a pierwszym z punktów stacjonarnych, to w długim okresie wszystkie badane zmienne makroekonomiczne zmierzają do 0. Aby gospodarka nie wpadła w pułapkę ubóstwa, musi zatem cechować się odpowiednio wysoką stopą oszczędności/inwestycji, która przesuwą krytyczny nietrywialny punkt stacjonarny w lewo.

W odróżnieniu od oryginalnego modelu Solowa, w prezentowanym modelu wzrostu gospodarczego wykazaliśmy, że poniżej pewnego poziomu stopy oszczędności/inwestycji nie istnieje żaden nietrywialny punkt stacjonarny, a powyżej tego poziomu mamy dwa nietrywialne punkty stacjonarne. Pierwszy z nich (przy niższym poziomie kapitału na pracującego) jest punktem niestabilnym, drugi zaś (cechujący się wyższą wartością tej zmiennej makroekonomicznej) – punktem stabilnym.

Zbadaliśmy również dynamikę rozwiązań modelu i przeprowadziliśmy symulacje numeryczne trajektorii kapitału na pracującego, technologii i wydajności pracy przy wybranych quasierlastycznościach (wydajności pracy względem kapitału na pracującego), stopach oszczędności/inwestycji i stopie ubytku kapitału na pracującego.

Z przeprowadzonych analiz teoretycznych i wyników prezentowanych symulacji numerycznych wynika, że im wyższa stopa oszczędności/inwestycji (przy danej kombinacji pozostałych zmiennych niezależnych w badanym modelu), tym większe prawdopodobieństwo, że tak uogólniony model Solowa ma dwa nietrywialne punkty stacjonarne. Ponadto im wyższa wartość stopy oszczędności/inwestycji (przy dwóch

nietrywialnych punktach stacjonarnych), tym większa rozpiętość przedziału pomiędzy wartościami kapitału na pracującego w nietrywialnych punktach stacjonarnych badanego modelu wzrostu. Im większa zaś rozpiętość tego przedziału, tym większe prawdopodobieństwo, że wyjściowy poziom kapitału na pracującego jest wyższy od wartości tej zmiennej w pierwszym z nietrywialnych punktów stacjonarnych. Z tego wynika, że wysokiej stopie oszczędności/inwestycji towarzyszy niskie prawdopodobieństwo, że w gospodarce charakteryzującej się pewnym kapitałem na pracującego $k(0) > 0$ wartości podstawowych zmiennych makroekonomicznych na pracującego będą w długim okresie dążyć do 0.

Bibliografia

- Aghion, P., Howitt, P. (1998). *Endogenous Growth Theory*. MIT Press.
- Allen, R. D. G. (1975). *Teoria makroekonomiczna. Ujęcie matematyczne*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- Arrow, K. J. (1962). The Economic Implications of Learning by Doing. *Review of Economic Studies*, 29(3), 155–173. <https://doi.org/10.2307/2295952>.
- Baier, S. L., Dwyer, Jr., G. P., Tamura, R. (2006). How Important are Capital and Total Factor Productivity for Economic Growth?. *Economic Inquiry*, 44(1), 23–49. <https://doi.org/10.1093/ei/cbj003>.
- Barro, R. J., Sala-i-Martin, X. (1995). *Economic Growth*. MIT Press.
- Cobb, C. W., Douglas, P. H. (1928). A theory of production. *The American Economic Review*, 18(1), 139–165. <https://www.aeaweb.org/aer/top20/18.1.139-165.pdf>.
- De Visscher, S., Eberhardt, M., Everaert, G. (2020). Estimating and testing the multicountry endogenous growth model. *Journal of International Economics*, 125, 1–32. <https://doi.org/10.1016/j.jinteco.2020.103325>.
- Deboeck, B. (2023). Prospects for long-term productivity growth. *Quarterly Report on the Euro Area*, 22(1), 31–42. https://economy-finance.ec.europa.eu/system/files/2023-05/ip201_en_chapter%20III.pdf.
- Dhooge, A., Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A. (2003). MATCONT: A MATLAB Package for Numerical Bifurcation Analysis of ODEs. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 29(2), 141–164. <https://doi.org/10.1145/779359.779362>.
- Dykas, P., Tokarski, T., Wisła, R. (2023). *The Solow Model of Economic Growth: Application to the Contemporary Macroeconomics Issues*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003323792>.
- Ferrara, M., Guerrini, L. (2009). The neoclassical model with variable population change. W: M. Jha, C. Long, N. Mistorakis, C. A. Bulucea (red.), *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on Mathematical and Computational Methods in Science and Engineering* (s. 119–123). World Scientific and Engineering Academy and Society.
- Filipowicz, K. (2019). *Wpływ interakcji przestrzennych na zróżnicowanie rozwoju gospodarczego Polski*. Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

- Filipowicz, K., Grodzicki, M., Tokarski, T. (2016). Równowaga Solowa przy alternatywnych trajektoriach liczby pracujących. *Acta Universitatis Lodzensis Folia Oeconomica*, 6(326), 181–202. <https://doi.org/10.18778/0208-6018.326.12>.
- Filipowicz, K., Krawiec, A., Tokarski, T. (2024a). War and Economic Growth: An Analyses Based on Extended Solow Model. *Defence and Peace Economics*, 36(6), 825–839. <https://doi.org/10.1080/10242694.2024.2435280>.
- Filipowicz, K., Krawiec, A., Tokarski, T. (2024b). *Wykłady z teorii wzrostu gospodarczego* (t. 1). Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.
- Filipowicz, K., Syrek, R., Tokarski, T. (2017). Ścieżki wzrostu w modelu Solowa przy alternatywnych trajektoriach liczby pracujących. *Przegląd Statystyczny*, 64(1), 21–40. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0014.0759>.
- Florczak, W., Świeczewska, I., Welfe, W. (2013). Modelowanie procesu produkcji w makroekonomicznym modelu W8D-2010. *Acta Universitatis Lodzensis Folia Oeconomica*, (294), 133–177. <https://dspace.uni.lodz.pl/xmlui/bitstream/handle/11089/10495/05-florczak.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- Grossman, G. M., Helpman, E. (1991). *Innovation and Growth in the Global Economy*. MIT Press.
- Heshmati, A., Rashidghalam, M. (2016). *Estimation of Technical Change and TFP Growth Based on Observable Technology Shifters* (IZA DP No. 10448). <https://docs.iza.org/dp10448.pdf>.
- Kliber, P., Malaga, K. (2003). Zbieżność ścieżek wzrostu gospodarki Polski i polskich województw w latach 1998–2000 do stabilnych stanów równowagi. *Studia Regionalne i Lokalne*, (4), 41–64. https://studreg.uw.edu.pl/dane/web_sril_files/104/2003_4_kliber_malaga.pdf.
- Lucas, Jr., R. E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22(1), 3–42. [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7).
- Malaga, K. (2013, 28–29 listopada). *Jednolita teoria wzrostu gospodarczego – stan obecny i nowe wyzwania* [referat]. IX Kongres Ekonomistów Polskich, Warszawa.
- Mankiw, N. G., Romer, D., Weil, D. N. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407–437. <https://doi.org/10.2307/2118477>.
- Matsumoto, A., Szidarovszky, F. (2025). Delay Solow model revisited. *Metroeconomica*, 76(4), 467–480. <https://doi.org/10.1111/meca.12494>.
- Nonneman, W., Vanhoudt, P. (1996). A further augmentation of the Solow model and the empirics of economic growth for OECD countries. *The Quarterly Journal of Economics*, 111(3), 943–953. <https://doi.org/10.2307/2946677>.
- Philippon, T. (2022). *Additive Growth* (NBER Working Paper Series No 29950). <https://doi.org/10.3386/w29950>.
- Plata Pérez, L., Calderón, E. (2009). A modified version of Solow-Ramsey model using Richard's growth function. *EconoQuantum*, 6(1), 65–70. <https://doi.org/10.18381/eq.v6i1.99>.
- Richards, F. J. (1959). A Flexible Growth Function for Empirical Use. *Journal of Experimental Botany*, 10(2), 290–301. <https://doi.org/10.1093/jxb/10.2.290>.
- Romer, P. M. (1986). Increasing Returns and Long-Run Growth. *Journal of Political Economy*, 94(5), 1002–1037. <https://doi.org/10.1086/261420>.
- Romer, P. M. (1990). Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, 98(5), S71–S102. <https://doi.org/10.1086/261725>.

- Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65–94. <https://doi.org/10.2307/1884513>.
- Solow, R. M. (1957). Technical change and the aggregate production function. *The Review of Economics and Statistics*, 39(3), 312–320. <https://doi.org/10.2307/1926047>.
- Solow, R. M. (2000). *Growth Theory. An Exposition* (wyd. 2). Oxford University Press.
- Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, 32(2), 334–361. <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x>.
- Ulam, S. (1958). John von Neumann 1903–1957. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64(3), 1–49. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1958-10189-5>.
- Uzawa, H. (1965). Optimal technical change in an aggregative model of economic growth. *International Economic Review*, 6(1), 18–31. <https://doi.org/10.2307/2525621>.
- Vollrath, D. (2024). The Elasticity of Aggregate Output with Respect to Capital and Labor. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 16(4), 470–504. <https://doi.org/10.1257/mac.20220215>.
- Welfe, W. (2003). Łączna produktywność czynników produkcji a postęp techniczny. *Studia Ekonomiczne*, 36–37(1–2), 94–115.
- Wisła, R., Nowosad, A. (red.). (2020). *Economic Transformation in Poland and Ukraine. National and Regional Perspectives*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003041375>.