

# Zastosowanie indykatorów Benneta i Montgomery'ego w analizie danych skanowanych – porównanie własności i oszacowań efektów<sup>1</sup>

Natalia Pawelec<sup>a</sup>

**Streszczenie.** Na początku XXI w. nastąpił renesans zainteresowania indykatorami cen i ilości zaproponowanymi w latach 20. XX w., co wynika z tego, że indykatory są mniej niż indeksy wrażliwe na występowanie zerowych cen i ilości. Własność ta ma szczególne znaczenie w badaniach segmentów rynku charakteryzujących się dużą rotacją produktów oferowanych w sprzedaży. Indykatory cen i ilości mogą znaleźć zastosowanie w analizie danych skanowanych, czyli pochodzących bezpośrednio z sieci handlowych. Analityk staje wówczas przed wyborem odpowiedniej formuły indykatora. Dwie najpopularniejsze to formuła Benneta i formuła Montgomery'ego. Celem badania omawianego w artykule jest wskazanie potencjalnych różnic między wartościami bilateralnych indykatorów (cenowych i ilościowych) Benneta i Montgomery'ego, a także sprawdzenie, w jaki sposób filtrowanie i agregacja danych skanowanych wpływają na skalę tych różnic. Porównano zarówno własności aksjomatyczne indykatorów, jak i potencjalne różnice wartości uzyskane dla wybranych grup produktów. Rezultaty badania wskazują, że różnice wartości indykatorów Benneta i Montgomery'ego sięgają kilku punktów procentowych. Wyniki oszacowań efektów – przede wszystkim cenowych, ale także ilościowych – zależą od poziomu agregacji danych, a zastosowanie filtrów danych uwydatnia zarówno efekt cenowy, jak i ilościowy.

**Słowa kluczowe:** dane skanowane, indykator Benneta, indykator Montgomery'ego

**JEL:** C43

## Application of Bennet and Montgomery indicators in scanner data analysis: comparison of properties and effect estimates

**Abstract.** Price and quantity indicators, proposed in the 1920s, have since the early 2000s experienced a kind of revival, which results from the fact that, contrary to indices, these indicators are less sensitive to the occurrence of zero prices and quantities. This property is particularly important in the analysis of market segments that have a high turnover of products offered for sale. Price and quantity indicators can be applied in the analysis of scanned data, i.e. data coming directly from retail chains. The analyst is then faced with the dilemma of choosing an appropriate formula of the indicator, the two most popular being the Bennet and Montgomery formulas. The

<sup>1</sup> Artykuł został opracowany na podstawie referatu wygłoszonego na XLI Międzynarodowej Konferencji Naukowej „Wielowymiarowa analiza statystyczna”, która odbyła się w dniach 6–8 listopada 2023 r. w Łodzi. / The article is based on a paper delivered at 41st International Conference 'Multivariate Statistical Analysis' held on 6–8 November 2023 in Lodz, Poland.

<sup>a</sup> Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Instytut Ekonomii, Polska / University of Lodz, Faculty of Economics and Sociology, Institute of Economics, Poland.  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5289-6204>. E-mail: [natalia.pawelec@uni.lodz.pl](mailto:natalia.pawelec@uni.lodz.pl).

aim of the research described in the paper is to identify the potential differences between the values of the Bennet and Montgomery bilateral indicators (price and quantity) and also to see how the filtering of scanner data and their aggregation affect the scale of these differences. The paper compares both the axiomatic properties of these indicators and the potential differences in their values obtained for selected groups of scanner products. The results of the study indicate that the differences in the values between the Bennet and Montgomery indicators reach several percentage points. Particularly the estimates of the price effects, but also the quantity effects depend on the level of data aggregation and the use of data filters highlights both the price and quantity effects.

**Keywords:** scanner data, Bennet indicator, Montgomery indicator

## 1. Wprowadzenie

Teoria indeksów (wskaźników) cen polega na porównywaniu cen, ilości i wydatków na towary i usługi między dwoma okresami: bazowym i bieżącym. Indeksy cen są wykorzystywane do konstruowania różnych miar aktywności gospodarczej, takich jak wskaźnik cen producentów (Producer Price Index – PPI) i wskaźnik cen konsumpcyjnych (Consumer Price Index – CPI, znany też jako wskaźnik cen towarów i usług konsumpcyjnych), oraz do urealniania produktu krajowego brutto (Fox, 2006). Nieuwzględnianie w pełni zmian jakościowych oraz towarów nowych i znikających to jedno z ważniejszych źródeł potencjalnego obciążenia pomiaru CPI. Podczas przeprowadzania analiz można przyjąć podejście wskaźnikowe (preferowane przez ekonomistów) – wykorzystywać indeksy, lub podejście biznesowe – określać różnice pomiędzy cenami i/ lub ilością towarów i usług, czyli posługiwać się indykatorami<sup>2</sup>. Analiza oparta na różnicach sprawia, że w sytuacji, gdy w niektórych okresach pojawią się zerowe ilości i/ lub ceny, nie wystąpi problem dzielenia przez zero, który daje o sobie znać podczas pracy z indeksami opartymi na ilorazach (Fox, 2006). Nabiera to szczególnego znaczenia w przypadku danych skanowanych, ponieważ występowanie zerowych cen jest tu powszechnym zjawiskiem, które przysparza trudności analitycznych zarówno statystykom, jak i np. właścicielom supermarketów chcącym porównywać wyniki sprzedaży różnych grup (segmentów) produktów w dwóch okresach. Indykatory<sup>2</sup> oparte na różnicach wartości cen, ilości i wydatków okazują się zatem przydatne przede wszystkim w analizie danych skanowanych. Należy jednak podkreślić, że w badaniach zmian cen produktów indykatory nie zastępują indeksów cen, lecz stanowią ich cenne uzupełnienie.

Jeden z postulatów teorii indeksów – odwróconego czasu (ang. *factor reversal test*) – wymaga, aby indeks wartości dekomponował się na iloczyn indeksu cen i indeksu

---

<sup>2</sup> Indykator (ang. *indicator*) nie jest synonimem wskaźnika/indeksu (ang. *index*). W literaturze wyraźnie rozróżnienie tych pojęć – w teorii pomiaru inflacji – wprowadził Diewert (2005). Jako zasadniczą różnicę pomiędzy nimi wskazał to, że indeks cen (ang. *price index*) uwzględnia ilorazy cen, a indykator cen (ang. *price indicator*) – różnice cen, co ma wpływ na ich własności i zastosowanie.

ilości. To restrykcyjny wymóg, którego nie spełnia np. indeks Laspeyresa (von der Lippe, 2007). W przypadku indykatorów, np. Benneta (1920) czy Montgomery'ego (1929), zamysł jest taki, aby różnicę wartości sprzedaży w porównywanych okresach zdekomponować na sumę dwóch efektów: cenowego (bazującego na różnicy cen produktów) i ilościowego (opartego na różnicy pomiędzy ilością sprzedanych produktów w porównywanych okresach). O ile w teorii indeksów jest to wymóg nieosiągalny dla większości formuł indeksowych, o tyle w teorii indykatorów stanowi on punkt wyjścia ich konstrukcji (Balk i in., 2004; Cross i Färe, 2009). Warto podkreślić, że w ostatnich 20 latach tematyka dotycząca indykatorów ponownie zagościła w literaturze ekonomicznej i wciąż zyskuje na popularności. Świadczą o tym prace Chambersa (2001), Balka i in. (2004) oraz Ivancica i in. (2011), w których zaproponowano nowe ujęcie indykatorów cen i ilości.

Celem badania omawianego w artykule jest wskazanie potencjalnych różnic między wartościami bilateralnych indykatorów (cenowych i ilościowych) Benneta i Montgomery'ego, a także sprawdzenie, w jaki sposób filtrowanie i agregacja danych skanowanych wpływają na skalę tych różnic.

## 2. Podejście aksjomatyczne w ocenie indykatorów

W teorii indeksów wyróżniono dwa główne podejścia: aksjomatyczne i ekonomiczne (Balk i in., 2004). W pierwszym z nich określa się pożądane własności matematyczne indeksów (postulaty, aksjomaty, nazywane powszechnie *testami*) i proponuje indeksy, które spełniają możliwie najwięcej z tych aksjomatów. Drugie podejście odwołuje się do optymalizacji, polegającej na zminimalizowaniu kosztu zakupu koszyka dóbr w obrębie założonej użyteczności tego koszyka. Źródło podejścia ekonomicznego wiąże się z problemem właściwego zdefiniowania, a następnie pomiaru indeksu kosztów utrzymania (Cost of Living Index – COLI). W tym podejściu przyjmuje się, że pomiędzy cenami i ilościami zachodzą relacje wyjaśnione przez modele mikroekonomiczne. Warto wspomnieć również o ujęciu stochastycznym, w którym ostateczny wybór indeksu cenowego opiera się na własnościach statystycznych. W tym podejściu przyjmuje się, że indeks cenowy stanowi nieznaną parametr w ekonometrycznym modelu wyjaśniającym zachowanie cen, szacowany za pomocą odpowiedniego estymatora. Pozwala to na wyznaczenie różnych charakterystyk estymatora (i tym samym – indeksu), np. poziomu jego obciążenia i poziomu zmienności mierzonej wariancją, a nawet skonstruowanie odpowiadającego mu przedziału ufności. W podejściach stochastycznym i aksjomatycznym uwzględniane są jedynie zmienne obserwowalne (ceny i ilości komponentów); zakłada się również, że ceny i ilości komponentów są od siebie niezależne (Białek, 2021).

Teoretyczne podstawy budowania indykatorów opracowali Bennet (1920) i Montgomery (1929). Do końca XX w. nie mieli oni kontynuatorów, ale na początku XXI w. wzrosło zainteresowanie teorią indykatorów i aspektami praktycznymi (Fox, 2006). W tabl. 1 przedstawiono wybrane testy (postulaty), które – w odpowiednio zmienionej formie – dotyczą zarówno indykatorów, jak i indeksów statystycznych<sup>3</sup>.

**Tabl. 1.** Zestawienie najważniejszych testów wymaganych w teorii indeksów i indykatorów

| Testy                                                      | Warianty testów w przypadku                                                                                                                            |                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                            | indykatorów                                                                                                                                            | indeksów                                                                                                                           |
| Identyczności (ang. <i>identity test</i> )                 | $IP_{0,t}(p_i^0, p_i^0, q_i^0, q_i^t) = 0$                                                                                                             | $P_{0,t}(p_i^0, p_i^0, q_i^0, q_i^t) = 1$                                                                                          |
| Granic (ang. <i>bounding test</i> )                        | $\min\{q_i^0(p_i^t - p_i^0), q_i^t(p_i^t - p_i^0)\} \leq IP_{0,t}(p_i^0, p_i^t, q_i^0, q_i^t) \leq \max\{q_i^0(p_i^t - p_i^0), q_i^t(p_i^t - p_i^0)\}$ | $\min\{(p_i^t/p_i^0), i=1, 2, \dots, n\} \leq P_{0,t}(p_i^0, p_i^t, q_i^0, q_i^t) \leq \max\{(p_i^t/p_i^0), i=1, 2, \dots, n\}$    |
| Monotoniczności (ang. <i>monotonicity</i> )                | $IP_{0,t}(p_i^0, p_i^s, q_i^0, q_i^t) < IP_{0,t}(p_i^0, p_i^t, q_i^0, q_i^t)$<br>jeśli $p_i^s < p_i^t$                                                 | $P_{0,t}(p_i^0, p_i^s, q_i^0, q_i^t) < P_{0,t}(p_i^0, p_i^t, q_i^0, q_i^t)$<br>jeśli $p_i^s < p_i^t$                               |
| Rosnących cen (ang. <i>positivity of price change</i> )    | $IP_{0,t}(p_i^0, p_i^t, q_i^0, q_i^t) > 0$<br>jeśli $p_i^t > p_i^0$                                                                                    | $P_{0,t}(p_i^0, p_i^t, q_i^0, q_i^t) > 1$<br>jeśli $p_i^t > p_i^0$                                                                 |
| Liniowej homogeniczności (ang. <i>linear homogeneity</i> ) | $IP_{0,t}(\lambda p_i^0, \lambda p_i^t, q_i^0, q_i^t) = \lambda IP_{0,t}(p_i^0, p_i^t, q_i^0, q_i^t)$<br>dla dowolnej wartości $\lambda > 0$           | $P_{0,t}(p_i^0, \lambda p_i^t, q_i^0, q_i^t) = \lambda P_{0,t}(p_i^0, p_i^t, q_i^0, q_i^t)$<br>dla dowolnej wartości $\lambda > 0$ |
| Odwróconego czasu (ang. <i>time reversal test</i> )        | $IP_{0,t}(p_i^0, p_i^t, q_i^0, q_i^t) = -IP_{t,0}(p_i^t, p_i^0, q_i^t, q_i^0)$                                                                         | $P_{0,t}(p_i^0, p_i^t, q_i^0, q_i^t) = 1/P_{t,0}(p_i^t, p_i^0, q_i^t, q_i^0)$                                                      |

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Diewert (2005).

### 3. Zastosowanie indykatorów cen i ilości w analizie danych skanowanych

#### 3.1. Charakterystyka danych skanowanych

Dane skanowane pochodzą z elektronicznych terminali wykorzystywanych w punktach sprzedaży sieci handlowych i dostarczają informacji o sprzedawanych produktach zawartych w kodzie kreskowym, np. w systemie GTIN (Global Trade Item Number) lub EAN (European Article Number). Pozwalają na zdobycie wiedzy o cenach i poziomie konsumpcji produktów już na najniższym poziomie agregacji danych (Eurostat, 2017). Metody wykorzystywania danych skanowanych – opracowane w latach 70. XX w. – zmieniały się na przestrzeni lat. Zwiększały się także możliwości zdobywania tego typu informacji, co spowodowało, że stosowanie danych skanowanych do obliczania CPI stało się w ostatnim dwudziestoleciu powszechne (Białek i Roszkowski-Wójtowicz, 2023). Dane skanowane zawierają pewne metadane, zapisane w kodzie

<sup>3</sup> Objasnienie symboli znajdujących się w tabl. 1 zamieszczono w części 3.

kreskowym, które pozwalają na rozpoznawanie produktów i w rezultacie przypisanie ich do odpowiednich grup COICOP (Classification of Individual Consumption by Purpose – Klasyfikacja Spożycia Indywidualnego według Celu).

Dane skanowane mają więcej zalet niż dane uzyskiwane tradycyjnie. Są dostarczane przez sieci handlowe (a zatem relatywnie tanie), a ich przetwarzanie odbywa się z reguły w sposób niemal w pełni zautomatyzowany. Poza tym najczęściej mają bardzo duży wolumen i niosą informacje nie tylko o cenie produktu, lecz także o kodzie sprzedawcy, etykiecie produktu, jednostce (np. szt., kg) i wartości sprzedaży oraz liczbie sprzedanych jednostek. Taki bogaty zasób wiedzy jest przydatny w procesie klasyfikacji produktów do jednorodnych grup (segmentów), a także podczas dopasowywania produktów w czasie (ang. *product matching*). Co ważne, dane skanowane mają charakter transakcyjny – informują wyłącznie o rzeczywistych wydatkach poniesionych przez konsumentów (nie uwzględniają niezakupionych produktów).

### 3.2. Indykator Benneta

Zbiory jednorodnych produktów należących do tej samej grupy produktów w miesiącach 0 i  $t$  oznaczono odpowiednio jako  $G_0$  i  $G_t$ . Niech  $G_{0,t}$  oznacza zbiór dopasowanych produktów w obu momentach: 0 i  $t$ , a  $G_0^t$  – zbiór dostępnych produktów w miesiącach 0 i  $t$ , tj.  $G_0^t = G_0 \cup G_t$ . Niech  $p_i^\tau$  i  $q_i^\tau$  oznaczają odpowiednio cenę (dokładnie: wartość jednostkową) i ilość  $i$ -tego produktu w czasie  $\tau \in \{0, t\}$ , przy czym zakładamy, że  $p_i^\tau = q_i^\tau = 0$ , jeśli  $i$ -ty produkt nie jest dostępny w czasie  $\tau$ . Zgodnie z powyższymi oznaczeniami cenowe i ilościowe indykatory Laspeyresa i Paaschego, które są addytywnymi odpowiednikami indeksów cen i ilości Laspeyresa i Paaschego (International Labour Office i in., 2004), można przedstawić następująco:

$$IP_{0,t}^L = \sum_{i \in G_0^t} q_i^0(p_i^t - p_i^0), \quad IQ_{0,t}^L = \sum_{i \in G_0^t} p_i^0(q_i^t - q_i^0), \quad (1)$$

$$IP_{0,t}^P = \sum_{i \in G_0^t} q_i^t(p_i^t - p_i^0), \quad IQ_{0,t}^P = \sum_{i \in G_0^t} p_i^t(q_i^t - q_i^0). \quad (2)$$

Addytywnym odpowiednikiem cenowego i ilościowego indeksu Fishera (1922) są cenowe i ilościowe indykatory Benneta (1920), zdefiniowane jako średnia arytmetyczna indykatorów Laspeyresa i Paaschego:

$$IP_{0,t}^B = \frac{1}{2}(IP_{0,t}^L + IP_{0,t}^P) = \sum_{i \in G_0^t} \frac{q_i^0 + q_i^t}{2}(p_i^t - p_i^0), \quad (3)$$

$$IQ_{0,t}^B = \frac{1}{2}(IQ_{0,t}^L + IQ_{0,t}^P) = \sum_{i \in G_0^t} \frac{p_i^0 + p_i^t}{2} (q_i^t - q_i^0). \quad (4)$$

Niech  $V_{G_0}^0$  i  $V_{G_t}^{0t}$  oznaczają całkowite wydatki na wszystkie dostępne produkty odpowiednio w okresach 0 i  $t$ , tj.  $V_{G_0}^0 = \sum_{i \in G_0} p_i^0 q_i^0$  oraz  $V_{G_t}^{0t} = \sum_{i \in G_0} p_i^t q_i^t$ . Indykatory Benneta pozwalają rozłożyć bezwzględną zmianę całkowitej wartości sprzedaży addytywnie na efekt cenowy i ilościowy:

$$V_{G_t}^{0t} - V_{G_0}^0 = IP_{0,t}^B + IQ_{0,t}^B. \quad (5)$$

Równanie (5) oznacza, że indykatory Benneta spełniają aksjomat sumy, znany z podejścia aksjomatycznego (Diewert, 2005). Łatwo wykazać, że indykatory Benneta spełniają także aksjomaty: identyczności, monotoniczności w cenach/iłościach, jednorodności w cenach/iłościach i odwracalności w czasie (Diewert, 2005).

W przeciwieństwie do przedsiębiorstw, w przypadku których analizowany zbiór pozostaje względnie stabilny w czasie (oznacza to, że obserwacje dotyczą zazwyczaj tej samej grupy firm, a zmiany w jej składzie są rzadkie, podobnie jak zerowe ceny lub ilości), w przypadku danych skanowanych zmienność asortymentu oraz występowanie zerowych wartości są częstym zjawiskiem – co wynika ze znacznej rotacji produktów spowodowanej sezonowością artykułów, trendami w sprzedaży i polityką dostawców – i stanowią duże wyzwanie analityczne.

Poniżej przedstawiono wzory na indykatory cen i ilości Benneta zdefiniowane tylko dla dopasowanych produktów. Chodzi o porównywanie produktu homogenicznego<sup>4</sup>, obserwowanego jednocześnie w okresie bieżącym i bazowym:

$$mIP_{0,t}^B = \sum_{i \in G_{0,t}} \frac{q_i^0 + q_i^t}{2} (p_i^t - p_i^0), \quad (6)$$

$$mIQ_{0,t}^B = \sum_{i \in G_{0,t}} \frac{p_i^0 + p_i^t}{2} (q_i^t - q_i^0). \quad (7)$$

Niech  $V_{G_{0,t}}^0$  i  $V_{G_{0,t}}^{0t}$  oznaczają całkowite wydatki na wszystkie dopasowane produkty, odpowiednio w okresach 0 i  $t$ , tj.  $V_{G_{0,t}}^0 = \sum_{i \in G_{0,t}} p_i^0 q_i^0$  oraz  $V_{G_{0,t}}^{0t} = \sum_{i \in G_{0,t}} p_i^t q_i^t$ . Indykatory Benneta oparte na dopasowanych produktach umożliwiają dekompozycję

$$V_{G_{0,t}}^{0t} - V_{G_{0,t}}^0 = mIP_{0,t}^B + mIQ_{0,t}^B. \quad (8)$$

<sup>4</sup> Produkt homogeniczny to taki, który nie zmienił się między porównywanymi okresami i który zachowuje identyczne cechy, takie jak np. marka, rozmiar, skład i kod EAN.

### 3.3. Indykator Montgomery'ego

Bilateralny indyktor cenowy Montgomery'ego, który porównuje bieżący okres  $t$  z okresem bazowym 0 i uwzględnia tylko dopasowane produkty, można – przy użyciu oznaczeń wprowadzonych w sekcji 3.2 – zdefiniować następująco:

$$IP_{0,t}^M = \sum_{i \in G_{0,t}} L(p_i^t q_i^t, p_i^0 q_i^0) \ln \left( \frac{p_i^t}{p_i^0} \right), \quad (9)$$

a bilateralny indyktor ilościowy Montgomery'ego jako:

$$IQ_{0,t}^M = \sum_{i \in G_{0,t}} L(p_i^t q_i^t, p_i^0 q_i^0) \ln \left( \frac{q_i^t}{q_i^0} \right). \quad (10)$$

Można wykazać (Montgomery, 1929), że zmiana wartości sprzedaży w dwóch rozważanych okresach (zaobserwowana dla dopasowanych produktów) może być zdekomponowana również przy użyciu indykatorów cenowych i ilościowych Montgomery'ego. Innymi słowy zachodzi

$$V_{G_{0,t}}^{0t} - V_{G_{0,t}}^0 = mIP_{0,t}^M + mIQ_{0,t}^M. \quad (11)$$

Warto podkreślić, że w przypadku danych skanowanych zbiór produktów dostępnych w okresach bazowym i bieżącym (tj.  $G_0^t = G_0 \cup G_t$ ) jest zazwyczaj nadzbiorem zbioru dopasowanych produktów. W przypadku indykatora Benneta nie stwarza to problemów obliczeniowych, ponieważ zakłada się, że jeśli produkt jest dostępny w okresie  $t_1$ , ale nie jest dostępny w okresie  $t_2$ , to ma zerową ilość i cenę w okresie  $t_2$ . W przypadku indykatora Montgomery'ego zastosowanie takiej procedury nie jest możliwe, ponieważ wykorzystuje się tu logarytmy z cen i ilości. Można jednak wykazać, że następująca procedura umożliwia skuteczne określenie cen i ilości niedopasowanych produktów w porównywanych okresach:

$$p_i^t = q_i^t = \varepsilon \text{ dla } i \in G_0 \setminus G_t \text{ oraz } p_i^0 = q_i^0 = \varepsilon \text{ dla } i \in G_0 \setminus G_t, \quad (12)$$

przy czym  $\varepsilon$  jest z założenia niewielką liczbą rzeczywistą dodatnią (w badaniu przyjęto  $\varepsilon = 0,000001$ ).

Przyjęcie dostatecznie małej wartości  $\varepsilon$  nie tylko nie powoduje żadnych obciążeń oceny dynamiki zmian cen i ilości, ale jest wymogiem koniecznym w przypadku stosowania indykatorów Montgomery'ego, gdy występują zerowe ceny lub ilości. Białek i Pawelec (2024) wykazali, że dekompozycja zmiany całkowitej wartości sprzedaży na efekt cenowy i ilościowy z wykorzystaniem indykatorów Montgomery'ego jest osiągnięta dopiero asymptotycznie, czyli przy  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Przeprowadzone przez nich liczne

eksperymenty dowodzą, że wartości  $\varepsilon = 0,000001$  lub niższe w zasadzie gwarantują poprawną ocenę efektu cenowego i ilościowego.

Dzięki powyższej procedurze indyktor Montgomery'ego dla wszystkich dostępnych (w tym niedopasowanych) produktów można zdefiniować następująco:

$$IP_{0,t}^M = \sum_{i \in G_{0,t}} L(p_i^t q_i^t, p_i^0 q_i^0) \ln \left( \frac{p_i^t}{p_i^0} \right), \quad (13)$$

$$IQ_{0,t}^M = \sum_{i \in G_{0,t}} L(p_i^t q_i^t, p_i^0 q_i^0) \ln \left( \frac{q_i^t}{q_i^0} \right). \quad (14)$$

## 4. Badanie empiryczne

### 4.1. Charakterystyka wykorzystanych zbiorów danych skanowanych

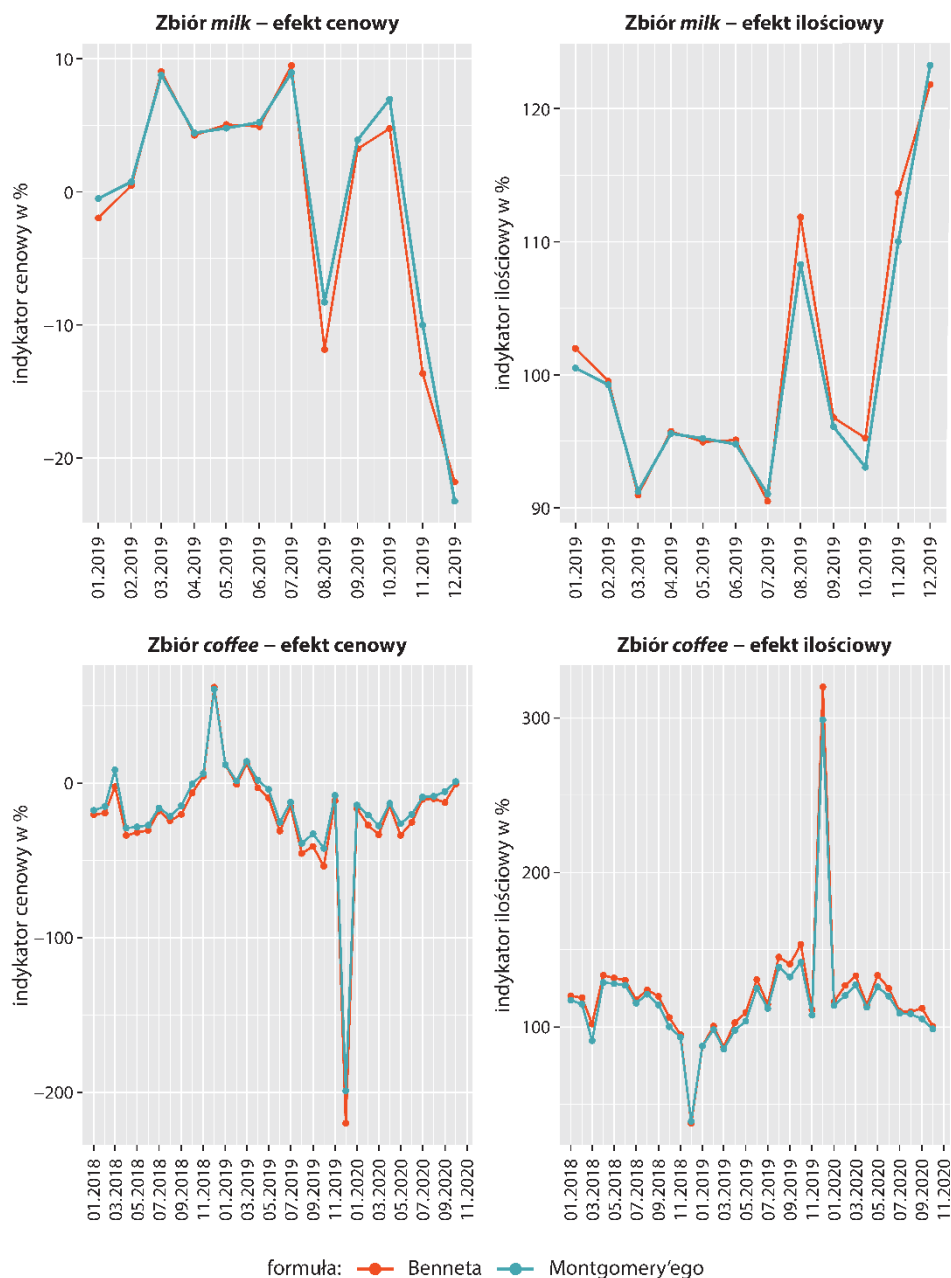
W badaniu empirycznym wykorzystano dane skanowane będące składową pakietu *PriceIndices* (Białek, 2021) napisanego w środowisku R. Dane pochodzą z sieci handlowej prowadzącej działalność w Polsce<sup>5</sup>. Zbiór *milk* składa się z 4386 rekordów dotyczących sprzedaży mleka i obejmuje okres od grudnia 2018 r. do sierpnia 2020 r. Zbiór *coffee* zawiera 42 561 rekordów dotyczących sprzedaży kawy i obejmuje okres od grudnia 2017 r. do października 2020 r. Zmienne w układzie kolumnowym, które znajdują się w zbiorach *milk* i *coffee*, są następujące:

- *time* – data wykonania transakcji;
- *prices* – cena sprzedanego produktu w zł;
- *quantities* – ilość sprzedanego produktu w mg/ml;
- *prodID* – unikalny kod produktu nadany po przeprowadzeniu dopasowania produktów w czasie;
- *retID* – unikalny kod poszczególnych punktów sprzedaży detalicznej (outletów sieci handlowej);
- *description* – opis sprzedanych produktów (tzw. etykieta produktu).

### 4.2. Porównanie indyktorów cen i ilości

Na wykresie zestawiono efekty cenowy i ilościowy oszacowane z wykorzystaniem indyktorów Benneta oraz Montgomery'ego w podziale na zbiory *milk* i *coffee*.

<sup>5</sup> Nie uzyskano zgody na ujawnienie nazwy sieci handlowej, z której pochodzą dane.

**Wykres.** Porównanie efektów cenowego i ilościowego pomiędzy indykatorami

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z pakietu *PricelIndices*.

Z wykresu wynika, że zarówno dla zbioru *milk*, jak i dla zbioru *coffee* cenowy indyktor Benneta daje nieco mniejsze wartości niż cenowy indyktor Montgomery'ego – stanowi to regułę w całym oknie czasowym. Z kolei efekt ilościowy w przypadku indykatora Benneta jest większy, niż wskazuje indyktor Montgomery'ego – to również reguła obserwowana w całym analizowanym oknie czasowym.

#### 4.3. Wpływ filtrowania danych i agregacji na różnice pomiędzy indykatorami Benneta i Montgomery'ego

W tabl. 2 i 3 zamieszczono wartości indykatorów Benneta i Montgomery'ego w dwóch przypadkach: bez użycia filtrów danych i po zastosowaniu filtrów danych (ściśle: filtra niskiej sprzedaży i filtra ekstremalnych zmian cen). Uwzględniono dwa warianty definicji produktu homogenicznego:

- określanie produktu na najniższym poziomie agregacji danych, tj. z zastosowaniem kodu GTIN;
- ujęcie szersze, czyli z wykorzystaniem kategorii COICOP 6.

Uzyskane wyniki przedstawiono w tabl. 2.

**Tabl. 2.** Porównanie indykatorów Benneta oraz Montgomery'ego wyznaczonych dla różnych poziomów agregacji danych i w zależności od opcjonalnego filtrowania danych dla zbioru *milk*

| Wyszczególnienie                      | Indyktor Benneta |            | Indyktor Montgomery'ego |            |
|---------------------------------------|------------------|------------|-------------------------|------------|
|                                       | bez filtrów      | z filtrami | bez filtrów             | z filtrami |
| Różnica wartości sprzedaży: w zł .... | 9 859,35         | 3 290,01   | 859,35                  | 3 290,01   |
| w % ....                              | 100,00           | 100,00     | 100,00                  | 100,00     |
| <b>Poziom GTIN</b>                    |                  |            |                         |            |
| Efekt cenowy: w zł .....              | -2 151,48        | -13 017,97 | -2 293,52               | -11 092,52 |
| w % .....                             | -21,82           | -395,68    | -23,26                  | -337,16    |
| Efekt ilościowy: w zł .....           | 1 010,83         | 16 307,98  | 12 152,87               | 14 382,53  |
| w % .....                             | 121,82           | 495,68     | 123,26                  | 437,16     |
| <b>Poziom COICOP 6</b>                |                  |            |                         |            |
| Efekt cenowy: w zł .....              | -103,43          | -1 518,77  | -97,50                  | -1 515,30  |
| w % .....                             | -1,05            | -46,16     | -0,99                   | -46,06     |
| Efekt ilościowy: w zł .....           | 9 962,78         | 4 808,78   | 9 956,84                | 4 805,31   |
| w % .....                             | 101,05           | 146,16     | 100,99                  | 146,06     |

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z pakietu *PriceIndices*.

Na poziomie GTIN – bez względu na rodzaj zastosowanego indykatora – użycie filtrów danych powoduje, że efekt cenowy staje się bardziej odseparowany od efektu ilościowego. Podobną zależność można zaobserwować na poziomie agregacji danych COICOP 6, ale nie jest ona już tak wyraźna.

Zastosowanie filtrów danych nie zmienia znaków efektów cenowego i ilościowego. Oznacza to, że jeśli przed zastosowaniem filtrów wartość indykatora

cenowego/iłościowego była ujemna, to po ich zastosowaniu pozostawała ujemna, a jeśli była dodatnia – to pozostawała dodatnia. Oczywiście różnica wartości sprzedaży produktów jest jednakowa bez względu na poziom agregacji danych. Obserwując wartości indykatorów wyrażone liczbowo (nie procentowo), można zauważyć, że tylko w przypadku poziomu COICOP 6 zastosowanie filtrów prowadzi do zmniejszenia efektu ilościowego; dotyczy to obu indykatorów. Na poziomie GTIN zarówno efekt cenowy, jak i ilościowy uwydatniał się po zastosowaniu filtrów danych, ale zachowywał kierunek zmian.

**Tabl. 3.** Porównanie indykatorów Benneta oraz Montgomery'ego wyznaczonych dla różnych poziomów agregacji danych i w zależności od opcjonalnego filtrowania danych dla zbioru *coffee*

| Wyszczególnienie                      | Indykator Benneta |             | Indykator Montgomery'ego |             |
|---------------------------------------|-------------------|-------------|--------------------------|-------------|
|                                       | bez filtrów       | z filtrami  | bez filtrów              | z filtrami  |
| Różnica wartości sprzedaży: w zł .... | -535 494,52       | -416 645,82 | -535 494,52              | -416 645,82 |
| w % ....                              | 100,00            | 100,00      | 100,00                   | 100,00      |
| <b>Poziom GTIN</b>                    |                   |             |                          |             |
| Efekt cenowy: w zł .....              | 2 834,32          | -38 480,34  | -6084,94                 | -43 557,37  |
| w % .....                             | -0,53             | 9,24        | 1,14                     | 10,45       |
| Efekt ilościowy: w zł .....           | -538 328,84       | -378 165,48 | -529 409,58              | -373 088,45 |
| w % .....                             | 100,53            | 90,76       | 98,86                    | 89,55       |
| <b>Poziom COICOP 6</b>                |                   |             |                          |             |
| Efekt cenowy: w zł .....              | 116 264,89        | 64 714,01   | 112 272,90               | 60 838,91   |
| w % .....                             | -21,27            | -15,53      | -20,97                   | -14,60      |
| Efekt ilościowy: w zł .....           | -651 759,41       | -481 359,83 | -647 767,39              | -477 484,73 |
| w % .....                             | 121,71            | 115,53      | 120,97                   | 114,60      |

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z pakietu *PricelIndices*.

W przypadku zbioru danych o sprzedaży kawy wnioski tylko częściowo pokrywają się z tymi dotyczącymi sprzedaży mleka. Prawdopodobnie, że zastosowanie filtrów danych wyraźniej odseparowuje efekt cenowy i ilościowy, dotyczy jedynie niskiego poziomu agregacji danych (GTIN). Na poziomie agregacji COICOP 6 zauważalny jest odwrotny kierunek zmian – po wprowadzeniu filtrów efekty cenowy i ilościowy zbliżają się do siebie.

## 5. Podsumowanie

Dane skanowane mają wiele zalet i powinny być traktowane w szczególny sposób, ponieważ znacząco różnią się od tradycyjnych danych wykorzystywanych w badaniach statystycznych. Charakteryzują się wysokim stopniem szczegółowości – zawierają informacje o konkretnych produktach (np. na poziomie kodu EAN), dokładnej liczbie sprzedanych jednostek, rzeczywistej cenie transakcyjnej oraz czasie i miejscu

sprzedaży. Dzięki temu umożliwiają precyzyjną analizę zmian cen i zachowań konsumentów. Jednak ze względu na dużą rotację asortymentu oraz ogromną objętość danych te wymagają specjalnych metod przetwarzania i analizy. Jednym z problemów związanych z szacowaniem indeksów cen na najniższym poziomie agregacji danych są zerowe ceny i ilości, charakterystyczne dla produktów rotujących (np. sezonowych). W artykule poddano więc pod dyskusję zastosowanie indyktorów, które w przeciwieństwie do indeksów nie są wrażliwe na zerowe ceny i ilości.

Głównym wynikiem badania omawianego w artykule jest wykazanie praktycznej wartości indyktorów w pracy na danych skanowanych. Możliwość prostej i szybkiej dekompozycji efektów cenowego i ilościowego może okazać się przydatna zarówno statystykom pracującym w urzędach statystycznych, jak i np. właścicielom sieci handlowych przy określaniu popytu na produkty.

Nasuwać się również wnioski szczegółowe. W przypadku indykatora Benneta efekt cenowy jest mniejszy (oszacowanie na niższym poziomie), a efekt ilościowy – większy (oszacowanie na wyższym poziomie) niż w przypadku indykatora Montgomery’ego. Różnice wartości tych indyktorów nie przekraczają kilku punktów procentowych.

Wyniki oszacowań efektów cenowych i ilościowych zależą od poziomu agregacji danych, ale nie jest możliwe dokonanie jednoznacznej oceny kierunku tego wpływu (jest on różny w przypadku różnych zbiorów danych). Zastosowanie filtrów danych najczęściej uwypatnia (ale nie stanowi to reguły) zarówno efekt cenowy, jak i ilościowy w przypadku obu porównywanych indyktorów i obu poziomów agregacji danych.

## Bibliografia

- Balk, B. M., Färe, R., Grosskopf, S. (2004). The theory of economic price and quantity indicators. *Economic Theory*, 23(1), 149–164. <https://doi.org/10.1007/s00199-003-0364-5>.
- Bennet, T. L. (1920). The Theory of Measurement of Changes in Cost of Living. *Journal of the Royal Statistical Society*, 83(3), 455–462. <https://doi.org/10.2307/2340960>.
- Białek, J. (2012). Propozycja indeksu cen. *Wiadomości Statystyczne*, 57(7), 14–24. <https://doi.org/10.59139/ws.2012.07.1>.
- Białek, J. (2021). PriceIndices – a New R Package for Bilateral and Multilateral Price Index Calculations. *Statistika. Statistics and Economy Journal*, 101(2), 122–141. [https://csu.gov.cz/docs/107508/74c31da1-5b28-d24e-2763-fe355180540c/32019721q2\\_bialek.pdf?version=1.0](https://csu.gov.cz/docs/107508/74c31da1-5b28-d24e-2763-fe355180540c/32019721q2_bialek.pdf?version=1.0).
- Białek, J., Pawelec, N. (2024). The use of transitive Montgomery indicators for scanner data analysis. *Argumenta Oeconomica*, 53(2), 1–13. <https://doi.org/10.15611/aoe.2024.2.01>.
- Białek, J., Roszko-Wójtowicz, E. (2023). Potential reasons for CPI chain drift bias while using electronic transaction data. *Technological and Economic Development of Economy*, 29(2), 564–590. <https://doi.org/10.3846/tede.2023.18467>.
- Chambers, R. G. (2001). Consumers’ surplus as an exact and superlative cardinal welfare indicator. *International Economic Review*, 42(1), 105–119. <https://doi.org/10.1111/1468-2354.00102>.

- Cross, R. M., Färe, R. (2009). Value data and the Bennet price and quantity indicators. *Economics Letters*, 102(1), 19–21. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2008.10.003>.
- Diewert, W. E. (2005). Index Number Theory Using Differences Rather Than Ratios. *The American Journal of Economics and Sociology*, 64(1), 311–360. <https://doi.org/10.1111/j.1536-7150.2005.00365.x>.
- Eurostat. (2017). *Harmonised Index of Consumer Prices. Practical Guide for Processing Supermarket Scanner Data*. <https://circabc.europa.eu/ui/group/7b031f10-ac19-4da3-a36f-58708a70133d/library/8e1333df-ca16-40fc-bc6a-1ce1be37247c/details?download=true>.
- Fisher, I. (1922). *The making of index numbers: A study of their varieties, tests, and reliability*. Houghton Mifflin.
- Fox, K. J. (2006). A Method for Transitive and Additive Multilateral Comparisons: A Transitive Bennet Indicator. *Journal of Economics*, 87(1), 73–87. <https://doi.org/10.1007/s00712-005-0160-8>.
- International Labour Office, International Monetary Fund, Organisation for Economic Co-operation and Development, Eurostat, United Nations, World Bank. (2004). *Consumer Price Index Manual. Theory and Practice*. [https://www.ilo.org/sites/default/files/wcmsp5/groups/public/@dgreports/@stat/documents/presentation/wcms\\_331153.pdf](https://www.ilo.org/sites/default/files/wcmsp5/groups/public/@dgreports/@stat/documents/presentation/wcms_331153.pdf).
- Ivancic, L., Diewert, W. E., Fox, K. J. (2011). Scanner data, time aggregation and the construction of price indexes. *Journal of Econometrics*, 161(1), 24–35. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2010.09.003>.
- von der Lippe, P. (2007). *Index Theory and Price Statistics*. Peter Lang. <https://doi.org/10.3726/978-3-653-01120-3>.
- Montgomery, J. K. (1929). *Is There a Theoretically Correct Price Index of a Group of Commodities?*. L'Universale Tipografia poliglotta.